ELEMENTA GEOMETRIAE INFINITESIMORUM AUCTORE D. HIERONYMO...

Girolamo Saladini



XI
SALADIN

ELEMENTA GEOMETRIAE INFINITESIMORUM

AUCTORE

D. HIERONYMO SALADINI

LUCENSI

Monacho Caelestino, & in eadem Congregatione Philosophiae Lectore, nec non in Universitate Bononiensi publico Matheseos Professore,

LIBRI TRES.





BONONIAE MDCCLX.



Ex Typographia S. Thomae Aquinatis.

SUPERIORUM PERMISSU.

Illmo & Rmo Domino

D. SERAPHINO BRANCONE

THEBARUM ARCHIEPISCOPO.

D. HIERONYMUS SALADINI F.



Vae potissimum caussae me impulerunt, ut opusculum hoc meum, qualecumque est, tibi inscriberem, Illustrissime, & Reverendissime Praesul. Nam primùm quem mihi ma-

** gis

gis patronum optarem, quam eum, a quo & splendorem summum, & adjumenta quamplurima, praesertim in litterarum studiis, in Congregationem nostram universam redundarunt? Te autem eum esse nemo unus ignorat; quippe & praeceptis optimis, dum studiis praeesses, in eaque dignitate longe excelleres, & exquisitissima cujuscunque generis doctrina juvenes nostros imbuisti. Neque vero a promovendis studiis, & Congregatione nostra, quacumque re opus esset, juvanda destitisti: quamquam a Carolo Borbonio tunc Neapolitanorum, nunc Hispanorum Rege invictissimo, primùm ad Episcopalem Sedem Gallipolitanam, tum

ad

ad Thebarum Archiepiscopalem dignitatem vocatum, te a Congregatione nostra, veluti a nostro corpore distraxerint. Huc accedit praeclarissimi Fratris tui in nos studium incredibile, qui sapientissimi illius Regis primarius Rei Ecclesiasticae Administer quum eßet, sic negotia nostra tractavit, ut videretur ea quoque in publicis totius Regni negotiis reposuisse. At haec quidem ad universum Caelestinorum Ordinem pertinent. Illa vero mea propria sunt, meque potissimùm movent, quod Fratris alterius tui Cherubini, quem nunc Abbatem Generalem habemus, summam, ac prope incredibilem benignitatem & agnovi, & sum expertus. Id

quod mihi facile omnes credent; quis enim illo aut alacrior in communi re administranda, aut prudentior, aut justior, aut moderatior unquam fuit? Litterarum autem studia quam amanter promovet! quam liberaliter studiosos excipit! quam omni favore, & gratia complectitur! Huic ergo gratum facturum me esse existimavi, si libellum hunc meum, quasi studiorum meorum primitias, tibi, Illustrissime & Reverendissime Praesul, obsequentissime offerrem. Hunc igitur benigne accipe, meque in addictissimis, humillimisque tuis famulis habe.

LECTORI.



Uam utilia ſint, quinimo & neceſſaria elementa Geometriae infiniteſimorum, facile deprehendere potuit, quicumque animum ad ſublimiores cognitiones rerum mathematicarum appulerit. Quum enim fieri nullo pacto poſſit, ut in illis, niſi quantitatum infiniteſimarum ope, admodum proficiamus, hinc incredibile eſt, quibus difficultatibus, & erroribus obnoxii ſint mathematicarum diſciplinarum ſtudioſi, qui affectiones, proprietates, relationeſque magnitudinum infiniteſimarum non probe teneant. Quae proprietates eo minus perſpectae eſſe ſolent, quo altius evehuntur, quam proprietates magnitudinum finitarum, quae paſſim in vulgari

Geo-

Geometria explicantur; potissimum vero, cum neminem adhuc viderim, qui in illis expendendis operam posuerit. Praeclarissimi viri Isaacus Newton, & Gotofridus Leibnitz, omnium primi methodum detexerunt supputandi quantitates infinitesimas, ad quam perficiendam postea sublimiora Europae ingenia insudarunt, & adhuc insudant; sed quamvis talis methodus Geometriae infinitesimorum tota innixa sit, nondum tamen, quod ego sciam, liber prodiit, qui pro ejus Geometriae elementis haberi possit; quamquam viam, ut ita dicam, stravisse videntur & summus Newton, ubi agit de methodo rationum primarum, & ultimarum; & lectissima Foemina Agnesia initio Tomi secundi Institutionum analyticarum. Hinc procul dubio factum est, ut methodi analyticae, quibus plerique utuntur, supputandi quantitates infinitesimas,

nec

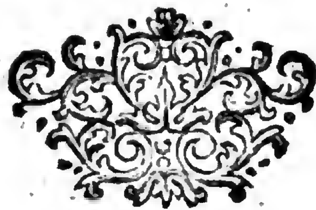
nec ita universales interdum sint, quemadmodum hactenus creditum est, nec ita fortasse verae. Quod quum animadvertissem, mecumque ipse reputarem, num tale opus aggredi ipse possem, rem totam communicavi cum Vincentio Riccati Societatis Jesu, viro celeberrimo, & de mathematicis disciplinis optime merito, cui tribuenda est mea, qualiscunque sit, earumdem cognitio; is autem in proposito me confirmavit, omnemque timorem sustulit, quem mihi homini, praesertim adolescenti, & rei magnitudo afferre debebat, & virium infirmitas. Huc accessit etiam auctoritas praeclarissimi viri Francisci Mariae Zanotti a secretis Academiae Bononiensis, qui hoc consilium, supra quam cuique credibile est, mihi commendavit. Illud etiam in mentem veniebat, subtilissimum Rogerium Boscowich, & ipsum Societatis

Jeſu, quem Romae cognoveram, in magnitudinum infiniteſimarum Syntheſi mirum in modum delectari, neque verum Mathematicum exiſtimare, qui hanc non calleret. Hiſce de cauſis permotus non dubitavi Theoremata ſtatim omni ſtudio perquirere, quae rite demonſtrata, atque ex ordine propoſita, tractationem illam, quam deſideraveram, quaeque pro elementis Geometriae infiniteſimorum haberi poſſet, conſtituerent. Hanc ego emitto in libros tres diviſam. In primo doctrinam expedio triangulorum habentium determinationem ad quantitatem infiniteſimam pertinentem, examino differentiam productorum, determinatis differentiis radicum, atque in Appendice hujuſce libri conſidero rectas a vero paralleliſmo declinantes quantitate infiniteſima. In ſecundo verò perpendo differentias arcuum, & angulorum infini-

fini-

finitesimorum, eorumque linearum trigonometrarum, atque superficierum ab istis lineis, & solidorum ab istis superficiebus genitorum in rotatione semicirculorum circa diametros. In tertio tandem considero curvas generatim, quas mihi, ad majorem claritatem, ut polygona infinitesimorum laterum repraesento; imprimis examino angulos factos a tangentibus cum curva; deinde methodum trado determinandi ex quantitatibus infinitesimis ordinis inferioris infinitesimas ordinis superioris, tam in curvis ad diametros relatis; quam in curvis relatis ad focum; trado similiter methodum determinandi rectas maximas, & minimas curvarum, dimetiendi earum curvaturas per circulos osculatorios; ubi ostendo non omnes curvas habere tales circulos, atque inutile esse conferre se ad vertices parabolarum

primariarum, & ſuperiorum pro menſurandis curvaturis, ubi evadunt minores omni circulo finito; ac tandem aſſigno methodum tutam, atque certam determinandi, & diſtinguendi in curvis puncta interſectionis, puncta flexus contrarii, atque regreſſus. Caeterum tibi, Lector benevole, hujus operis judicium relinquo, qui ſi minus rem ipſam, voluntatem certe, & deſiderium meum commendabis. Alii fortaſſe exemplo meo incitati, quod perficere ego non potui, perficient ipſi, & abſolvent. Vale.



Ο῾ ΘΕΟ῾Σ

Ὁ ΘΕΟΣ Γεωμετρεῖ·



U autem Domine, quantus es Geometra? Quum enim haec ſcientia nullos terminos habeat; quum in ſempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, Tu uno haec omnia intuitu perſpecta habes, abſque catena conſequentiarum, abſque taedio demonſtrationum. Ad caetera pene nihil facere poteſt intellectus noſter; & tanquam brutorum phantaſia, videtur nonniſi incerta quaedam ſomniare; unde in iis quot ſunt homines, tot exiſtunt fere ſententiae: in his conſpiratur ab omnibus, in his humanum ingenium ſe poſſe aliquid, imo ingens aliquid, & mirificum viſum eſt,

ut nihil magis mirum; quod enim in caeteris pene ineptum, in hoc efficax, sedulum, prosperum, &c. Te igitur vel ex hac re amare gaudeo, Te suspicere, atque illum diem desiderare suspiriis fortibus, in quo purgata mente, & claro oculo non haec solum omnia absque hac successiva, & laboriosa imaginandi cura, verum multo plura, & majora, ex tua Bonitate, & immensissima, sanctissimaque Benignitate conspicere, & scire concedetur, &c.

Cl. Barrowii verba Apollonio suo praefixa.

ELE-

ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

DEF. I.

GEOMETRIA infinitesimorum est scientia, qua considerantur relationes magnitudinum infinitesimarum.

DEF. II.

Quis quis sibi quantitates aliquas considerandas, atque inter se comparandas proponit, si id, quod agit, paulo diligentius secum reputet, facile intelliget, in unoquoque quantitatum genere se unam quasi primam assumere, ad quam aliae omnes ejusdem generis referantur, cujusque respectu aliarum magnitudines determinentur. Prima illa quantitas, qualiscumque ea sit, dicitur *unitas*; & est quasi communis mensura unitas, quae assumitur, omnesque aliae quantitates, quae ad unitatem proportionem habent fini-

tam (idest eam, quae finito numero exprimi possit) dicuntur *assignabiles*, a nonnullis etiam *finitae*.

DEF. III.

Si inducatur quantitas major quacunque assignabili, quaeque idcirco ad unitatem, quae assumpta est, proportionem habeat adeo magnam, ut nullo finito numero possit exprimi, ea dicitur *quantitas infinita*.

DEF. IV.

Si inducatur quantitas minor quacunque assignabili, quaeque idcirco ad unitatem, quae assumpta est, proportionem habeat adeo parvam, ut nullo finito numero possit exprimi, ea dicitur *quantitas infinitesima*. Erunt autem infinitesimae aliae omnes quaecunque ad hanc habent proportionem assignabilem, idest finito numero exprimendam, veluti si sint ejus duplae, triplae &c. quod facile patet. Hinc praeter quantitates assignabiles, existit

ſtit jam alter quantitatum ordo, nempe infiniteſimarum. Ac plane conſtat quantitatem quamvis infiniteſimam, quantumcunque ea repetatur, modo finities tantum repetatur, nunquam evadere poſſe aſſignabilem; ut ergo evadat aſſignabilis, neceſſe eſſe, ut repetatur infinities; quo ſane apparet infinita diſtantia, quae intercedere dicitur inter quantitates aſſignabiles, & infiniteſimas.

DEF. V.

Porro cum ordinem quempiam induxeris quantitatum infiniteſimarum, quae infinite diſtent ab aſſignabilibus, nihil impedit, quominus alias etiam quantitates fingas, quae ab illis infiniteſimis, quas induxiſti, eadem ratione diſtent infinite, quaeque alium infiniteſimarum ordinem conſtituant. Eo modo ad alios alioſque infiniteſimarum quantitatum ordines deinceps procedes, quoad libuerit. Is ordo infiniteſimorum, quem tibi poſt quantitates aſſignabiles primum proponis, dicitur *primus infiniteſimorum ordo*. Quem

tibi post hunc proponis, dicitur *secundus*. Alii deinceps *tertius*, *quartus &c.* Secundus ordo dicitur superior primo, tertius secundo &c.

DEF. VI.

Numerus naturalis, ex quo ordo infinitesimorum denominationem suam sortitur, appellatur *numerus ordinis*; hinc ordines summare, unum ab alio subtrahere, est summare, & subtrahere numeros ordinum.

DEF. VII.

Ordo *duplo*, vel *triplo major* relate ad alium ordinem dicitur ille, cujus numerus est duplus, vel triplus relate ad numerum istius ordinis.

AXIO-

AXIOMATA.

AXIOMA I.

QUoniam proportio quantitatis infinitesimae ad assignabilem adeo minima est, ut nullo assignabili, aut determinato numero, quamtumvis minimo, possit exprimi, idest mensuras omnes fugiat quascunque, ut ut minimas, excogitare, aut determinare possumus; ea re fit, ut, si quantitates assignabiles inter se comparare, certisque mensuris dimetiri velimus, nulla sit nobis ratio habenda quantitatum infinitesimarum; quae idcirco in illa consideratione perinde habentur, ac si nihil plane essent. Quare si quantitati assignabili infinitesima quaevis addatur, aut dematur, illius magnitudo nihil mutari censebitur. Eandem ob causam si quantitati infinitesimae cujusvis ordinis addatur, aut dematur infinitesima ordinis superioris, v. gr. si infinitesimae tertii ordinis addatur, aut dematur infinitesima ordinis quarti, magnitudo illius eadem, quae antea, manere existimabitur.

AXIO-

AXIOMA II.

Nulla magnitudo in se infinitesima censeri debet, sed tantum relative ad alias; hinc non semper tales magnitudines sperni possunt, sed tantum relative. Hinc etiam fit, ut eadem quantitas possit esse infinitesima diversi ordinis respectu ad diversas quantitates diversorum ordinum.

AXIOMA III.

Si quatuor magnitudines sint geometrice proportionales, & antecedens primae rationis sit infinitesimus, vel finitus, vel infinitus relate ad suum consequentem; erit etiam antecedens secundae rationis infinitesimus ejusdem ordinis, vel finitus, vel infinitus relate ad suum consequentem.

PROPOSITIO I.

SI duae quantitates A B, D E differant a duabus A C, D F infinitesima quantitate; ratio A B ad D E non differt a ratione A C ad D F. Fig. 1.

Demonst. A C est ad D F in ratione composita C A ad A B, A B ad D E, & D E ad D F; sed rationes C A ad A B, & D E ad D F non differunt a ratione aequalitatis. Ergo ratio B A ad D E non differt a ratione C A ad D F. *Q. E. D.*

SCHOLION.

Linea infinitesima B potest referri ad assignabilem A duobus modis. Primum quatenus magnitudinem ejus auget, vel minuit, si ipsi addatur, vel dematur. Hic vero lineola B pro nihilo habetur; quippe ex ejus additione, vel detractione nihil mutatur proportio lineae A ad aliam quamlibet assignabilem; vel si quid mutatur, mutatio est minor quacunque mutatione assignabili: atque hinc patet, Fig. 2.

nihil

nihil referre, utrum lineola B ſit major minorve, modo ſit infiniteſima. Secundo poteſt referri lineola B ad lineam A, quatenus in ipſam infinities ingreditur, & infinities repetita ipſam conſtituit. Quod nihil ſane aliud eſt, niſi conſiderare proportionem, quam habet A ad B; quae proportio utique infinita eſt, nec ullus aſſignari poteſt tantus numerus, qui ipſam exprimat. Hic vero plurimum refert, utrum lineola B ſit major, vel minor. Etenim quamvis proportio lineae A ad lineolam B ſit infinita, tamen erit duplo major, ſi linea B fuerit duplo minor, & omnino tanto major erit proportio, quanto lineola B minor erit.

Fig. 3. Ex his illud ſequitur: ſi duabus lineis aſſignabilibus A B, C D addantur infiniteſimae duae, qualeſcunque ſint B X, D Y, proportio aſſignabilium nihil mutabitur; quippe quod ipſarum magnitudines eaedem aeſtimabuntur, quae antea. Licebit ergo ponere A X, C Y : : A B, C D.

Nihilque impediet, quominus Euclideis inſiſtens demonſtrationibus, & *in-*

ver-

vertendo argumenteris: ergo C Y, A X : : C D, A B; & *alternando*; ergo A X, A B : : C Y, C D; & componendo: Ergo A X + C Y, C Y : : A B + C D, C D; & *dividendo:* ergo A X − C Y, C Y : : A B − C D, C D &c. Idque perpetuo licebit usquedum lineae tantum assignabiles A B, A X, C D, C Y, A X − C Y, A B − C D &c. in proportionalitatem venerint.

Atqui licet neque invertendo, neque alternando, neque componendo ex illa proportionalitate A X, C Y : : A B, C D ullae aliae lineae, praeter quam assignabiles in proportionalitatem venire possint; tamen dividendo prodire poterunt, & in proportionalitatem venire duae infinitesimae B X, D Y; id quod, tum demum accidet, si posito A X, A B : : C Y, C D, *dividendo* argumenteris: ergo A X − A B, A B : : C Y − C D, C D. Sive B X, A B : : D Y, C D, vel quod eodem recidit: A B, B X : : C D, D Y.

Quod si quantitates infinitesimae B X, D Y in proportionalitatem venerint, ar-

gumentationem illam, quam dividendo instituisti, & unde infinitesimae illae prodierunt, pro falsa habebis; nisi forte lineolae B X, D Y positae ab initio fuerint proportionales lineis A B, C D; vel a duabus, quae sint iisdem A B, C D proportionales, differant quantitate infinitesima ordinis superioris respectu ejus ordinis, cujus sunt ipsae lineae B X, D Y; etenim si B X, & D Y sint qualescunque, erit etiam qualiscunque proportio A B ad B X, & qualiscunque pariter erit proportio C D ad D Y; & poterunt proportiones hae duae diversae esse; nec tuto poni poterit A B, B X : : C D, D Y.

Fig. 4. Quare si in triangulo A B C ducta sit linea recta D E abscindens partes infinitesimas qualescunque A D, A E, licebit utique ponere A B, A C : : D B, E C, & A B, D B : : A C, E C; neque hinc tamen licebit dividendo argumentari: ergo A D, D B : : A E, E C; nisi ab initio posita fuerit linea recta D E parallela rectae B C, vel discrepans a vero parallelismo quantitate infi-

infinitesima, abscindens lineolas D A, E A candem habentes inter se proportionem, quam habent lineae rectae A B, A C.

PROPOSITIO II.

POsita serie finita quantitatum ejusdem ordinis continue proportionalium B A, C D, M N &c. cujus duo proximi termini B A, C D differant quantitate infinitesima S D: dico omnes proximos terminos finitae seriei differre quantitate infinitesima ejusdem ordinis. Fig. 5.

Demonst. Quoniam M N est ad C D, ut C D ad B A; erit etiam dividendo M N − C D ad C D, ut C D − B A ad B A, hoc est N L erit ad C D, ut D S ad B A, & permutando N L erit ad D S, ut C D ad B A; sed C D, & B A sunt ejusdem ordinis: ergo differentiae N L, D S sunt similiter ejusdem ordinis. Cumque eadem demonstratio repeti possit per omnes terminos finitae seriei, ergo patet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Per propositionem L N est ad D S, ut C D ad B A: ergo dividendo L N — S D ad S D, ut S D ad B A; adeoque differentia differentiarum L N, S D est infinitesima ejusdem ordinis respectu S D, ac est S D respectu B A. Idem dicito de differentiis differentiarum in infinitum.

COROLLARIUM II.

Cum differentiae S D, L N tamquam aequales considerari possint, hinc quantitates B A, C D, M N spectari possunt veluti aequidifferentes, licet sint geometrice proportionales.

COROLLARIUM III.

Patet etiam differentiam duorum quorumcumque terminorum B A, M N praedictae seriei esse ejusdem ordinis, ac est infinitesima D S; quandoquidem differentia illa nihil aliud est, quam ipsa

D S repetita vicibus numero finitis, ſpretis tamen nonnullis infiniteſimis reſpectivis.

PROPOSITIO III.

SI ſint plures quantitates A, B, C, &c. ita determinatae, ut B ſit infiniteſima reſpectu A, C ſit infiniteſima reſpectu B, & ſic deinceps; dico C eſſe infiniteſimam reſpectu A ejus ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinis C reſpectu B, cum ordine B reſpectu A. Fig. 6.

Demonſt. Quantitas C, ut evadat ejuſdem ordinis, ac eſt quantitas A, tranſire debet per tot infinita, quot ſunt unitates in numero ordinis C reſpectu B, & in numero ordinis B reſpectu A. Ergo numerus ordinis C reſpectu A habetur ſi ſummentur numerus ordinis C reſpectu B, & numerus ordinis B reſpectu A; adeoque ordo C reſpectu A reſultat ex ſumma ordinis C reſpectu B, cum ordine B reſpectu A. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

Fig. 7. SI sint plures quantitates A, B, C &c. infinitesimae cujuscunque ordinis, erit factum omnium quantitatum praedictarum infinitesimum ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinum quantitatum A, B, C &c.

Demonst. Sumantur totidem quantitates assignabiles quaecumque a, b, c &c. quot sunt quantitates infinitesimae A, B, C &c. tum fiat A ad S, ut b ad B, S ad X, ut c ad C &c. Factum omnium quantitatum assignabilium a, b, c &c. est ad factum omnium quantitatum A, B, C &c. in ratione composita a ad A, b ad B, c ad C &c. seu in ratione composita a ad A, A ad S, S ad X &c. seu in ratione a ad X. Sed X respectu ad assignabilem a est infinitesima ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinis X respectu S, & S respectu A, & A respectu a, (1) ergo factum omnium quantitatum infinitesimarum A, B, C &c. est ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinum omnium quantitatum A, B, C &c. *Q. E. D.*

(1) *per* 3. *prop.*

PRO-

PROPOSITIO V.

IN circulo si anguli ad centrum, vel ad peripheriam sunt infinitesimi cujuscunque ordinis; erunt etiam arcus, quibus insistunt, infinitesimi ejusdem ordinis, & viceversa.

Demonst. Anguli sive ad centrum, sive ad peripheriam proportionales sunt arcubus, quibus insistunt, & viceversa; sed angulis finitis respondent arcus finiti, & viceversa: ergo patet. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VI.

IN circulo arcus minor B C, & chorda B C sunt ejusdem ordinis. Fig. 8.

Demonst. Sumatur arcus minor B C in peripheria circuli quoties fieri potest, & arcubus ducantur subtensae, quae omnes aequales erunt chordae B C. Erit arcus B C ad summam omnium arcuum in peripheria sumptorum, ut subtensa B C ad summam omnium subtensarum respondentium. Sed summa omnium

nium arcuum, & summa omnium subtensarum sunt ejusdem ordinis: ergo patet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Ducta ex centro A recta A M secante bifariam arcum B C in M, haec bisecabit quoque chordam in R ad angulos rectos; adeoque C R erit sinus rectus anguli C A M; hinc sinus rectus, & arcus cujuscunque anguli sunt ejusdem ordinis.

COROLLARIUM II.

Anguli sive ad centrum, sive ad peripheriam sunt ejusdem ordinis, ac sunt arcus (1); sed arcus sunt ejusdem ordinis, ac sunt sinus recti (2): ergo anguli sunt ejusdem ordinis, ac sunt sinus recti.

(1) *per hanc prop.* (2) *per coroll. 1. huj. pro.*

COROLLARIUM III.

Hinc in triangulo rectangulo, ac proinde in triangulo quocunque, cujus anguli

guli ſunt omnes finiti latera ſunt ejuſdem ordinis.

PROPOSITIO VII.

IN triangulo rectangulo, & acutangulo unus dumtaxat angulus eſſe poteſt infiniteſimus: in triangulo verò obtuſangulo duo anguli eſſe poſſunt infiniteſimi, & quidem diverſorum ordinum.

Demonſt. prima pars. Si duo anguli eſſent infiniteſimi in triangulo rectangulo, & acutangulo; cum tertius ex hypotheſi ſit rectus, aut acutus; hinc ſumma trium angulorum in triangulo non aequaret duos rectos: quod eſt abſurdum.

Demonſt. ſecunda pars. In triangulo obtuſangulo duo anguli infiniteſimi cum angulo obtuſo poſſunt conficere ſummam duorum rectorum.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 9. IN triangulo acutangulo scaleno A B C sit angulus B infinitesimus; duorum reliquorum angulorum A, & C minor sit C. Dico primùm differentiam anguli C ab angulo recto esse infinitesimam ejusdem ordinis, cujus est angulus B. Dico secundùm differentiam anguli A ab angulo recto posse esse infinitesimam cujuscunque ordinis.

Demonst. prima pars. Ex angulo B demittatur normalis B D in basim A C, haec normalis cadet intra triangulum A B C; erit igitur triangulum A B C divisum in duo triangula rectangula A D B, C D B. Ergo angulus A cum angulo A B D, aequalis est angulo C cum angulo C B D; sed ex hypotesi angulus C minor est angulo A. Ergo angulus C B D major est angulo A B D; adeoque major est dimidio anguli A B C; hinc angulus C B D est infinitesimus ejusdem ordinis, cujus est angulus B; sed angulus C B D est differentia anguli C ab angulo recto. Ergo

angu-

angulus minor C differt ab angulo recto quantitate infinitesima ejusdem ordinis, cujus est angulus B. *Q. E. P.*

Pars secunda patet per se.

COROLLARIUM.

Hinc anguli A, & C non possunt differre nisi quantitate infinitesima cujuscunque ordinis incipiendo ab ordine anguli B.

PROPOSITIO IX.

IN triangulo rectangulo B A C si unus ex angulis acutis, ex. gr., C sit infinitesimus cujuscunque ordinis, erit latus oppositum B A infinitesimum ejusdem ordinis; reliqua vero latera A C, B C infinitesimum angulum comprehendentia differunt quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C. Et viceversa si unum ex lateribus angulum rectum continentibus, ex. gr., B A sit infinitesimum cujuscunque ordinis; an- Fig. 10.

 gulus

gulus ipsi oppositus C erit infinitesimus ejusdem ordinis.

Demonst. prima pars. In triangulo rectangulo B A C sit angulus A rectus, latus oppositum ipsi erit B C, quo posito pro sinu toto, erit B A sinus rectus anguli C. Ergo latus B A est ejusdem ordinis, cujus est angulus C. (1) *Q. E. P.*

(1) *per coroll. 2. prop. 6.*

Demonst. secunda pars. Centro C intervallo C A abscindatur C M aequalis C A: erit B M differentia laterum A C, B C; cum autem rectangulum B M in B C + C A aequetur quadrato B A; hinc ut A C + C B ad B A, ita B A ad B M. Ergo ordo rectae B M respectu B A, idem est, ac ordo rectae B A respectu B C; adeoque ordo rectae B M respectu B C est duplo major ordine rectae B A respectu ejusdem B C, seu est duplo major ordine anguli C. *Q. E. S.*

Pars tertia. Patet ex Corollario Propositionis sextae.

PRO-

PROPOSITIO X.

IN triangulo acutangulo ſcaleno B A C poſito angulo C infiniteſimo cujuſcunque ordinis, erit latus oppoſitum infiniteſimum ejuſdem ordinis; reliqua vero latera B C, A C differre poſſunt quantitate infiniteſima cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo ab ordine duplo majore anguli C; & viceverſa ſi latus unum B A ſit infiniteſimum cujuſcunque ordinis, erit angulus oppoſitus C infiniteſimus ejuſdem ordinis. Fig. 11.

Demonſt. prima pars. Ponatur angulus A minor angulo B. Quoniam angulus A ex hypotheſi eſt finitus, hinc ducta ex angulo majori B normale B R in latus C A, erunt in triangulo rectangulo A B R ſinus totus A B, & ſinus rectus B R ejuſdem ordinis (1); ſed ſinus rectus B R eſt infiniteſimus ejuſdem ordinis, ac eſt angulus C (2). Ergo latus A B erit infiniteſimum ejuſdem ordinis, ac eſt angulus C. *Q. E. P.*

(1) *per coroll. 2. prop. 6.*

(2) *per 9. prop.*

Demonſt. ſecunda Pars. Angulus acutus A differt a recto per angulum A B R

infini-

infinitesimum ejusdem ordinis, ac est angulus C (1). Ergo in triangulo rectangulo A B R recta A R est infinitesima respectu A B ejusdem ordinis, cujus est A B respectu A C (2); adeoque A R est infinitesima respectu A C ordinis duplo majoris anguli C. Ergo recta A C excedit rectam C R quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C; sed C B excedit C R quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C (3). Ergo latera A C, C B differre non possunt nisi quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C, vel alterius ordinis superioris. *Q. E. S.*

(1) *per* 8. *prop.*

(2) *per pr. part. huj. propos.*

(3) *per* 9. *prop.*

Pars tertia patet ex demonstratione primæ partis.

PROPOSITIO XI.

Fig. 12. IN triangulo obtusangulo B A C si angulus unus C sit infinitesimus; erit latus B A oppositum infinitesimum ejusdem ordinis; reliqua vero latera B C, C A differunt quantitate infinitesima ordinis

dinis ipsius anguli C: & viceversa si unus ex angulis acutis, ex. gr., B sit finitus, & latus tantum, quod continetur inter angulum obtusum A, & acutum finitum B sit infinitesimum; erit angulus C oppositus infinitesimus ejusdem ordinis.

Demonst. prima pars. Ex angulo obtuso A demittatur normalis A R in latus B C; erunt anguli B, & B R A, R A B finiti; hinc A B, B R, R A sunt ejusdem ordinis (1); sed A R est ejusdem ordinis, cujus est angulus C (2). Ergo B A, B R sunt ordinis ejusdem, cujus est angulus C. *Q. E. P.*

(1) *per coroll.* 3. *prop.* 6.

(2) *per* 9. *prop.*

Pars secunda. B C excedit C R quantitate B R infinitesima ordinis anguli C; sed C R non differt a C A nisi quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C (3); hinc (cum haec secunda differentia sit infinitesima respectu ad primam B R) B C excedit C A quantitate infinitesima ordinis ejusdem, cujus est angulus C. *Q. E. S.*

(3) *per* 9. *prop.*

Pars tertia patet ex demonstratione primae partis.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Fig. 13. IN triangulo obtusangulo A B C, in quo angulus unus C est infinitesimus, si angulus obtusus A B C major sit angulo recto, quantitate infinitesima ordinis cujuscunque superioris; incipiendo ab ordine anguli C inclusive, erit differentia laterum infinitesimum angulum comprehendentium infinitesima ordinis duplo majoris anguli C; si vero angulus obtusus A B C major sit angulo recto quantitate infinitesima ordinis inferioris relate ad ordinem anguli C; differentia laterum C A, C B erit infinitesima ordinis, qui resultat ex summa ordinis anguli C cum ordine differentiae anguli B A C a recto.

Demonst. prima pars. Ex puncto B erigatur normalis B S ad B C; erit angulus A B S differentia anguli A B C a recto. Quoniam angulus A B S, vel est infinitesimus ejusdem ordinis, ac est angulus C, vel ordinis superioris per suppositionem; hinc in triangulo obtusangulo A S B erit A S respectu A B,

vel

vel infinitesima ordinis anguli C, vel ordinis superioris; (1) adeoque A S respectu B C vel erit infinitesima ordinis duplo majoris anguli C, vel ordinis superioris (2). Ergo, cum S C excedat B C quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C (3), A C excedit B C quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C. *Q. E. P.*

(1) *per* 11. *prop.*

(2) *per* 3. *prop.*

(3) *per* 9. *prop.*

Demonst. secunda pars. A S respectu A B est infinitesima ordinis anguli A B S; A B respectu B C est infinitesima ordinis anguli C. Ergo A S respectu B C est infinitesima ordinis anguli A B S summati cum ordine anguli C (4); sed S C excedit C B quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C. Ergo, cum haec infinitesima sit respectu A S, erit A S differentia inter latera A C, B C infinitesima ordinis, qui resultat ex ordine anguli A B S summato cum ordine anguli C. *Q. E. S.*

(4) *per* 3. *prop.*

SCHOLION.

Ex omnibus triangulis angulum unum

infinitesimum habentibus, si fuerit isosceles, erit differentia laterum angulum infinitesimum continentium absolute nulla; si fuerit acutangulum scalenum, differentia laterum esse potest cujuscunque ordinis superioris, incipiendo ab ordine duplo majore anguli infinitesimi. Si fuerit rectangulum, vel obtusangulum, in quo angulus obtusus major est recto quantitate infinitesima cujuscunque ordinis superioris, incipiendo ab ordine anguli infinitesimi trianguli, erit differentia laterum ordinis duplo majoris anguli infinitesimi; si fuerit obtusangulum, in quo angulus obtusus major est recto quantitate infinitesima ordinis inferioris relate ad ordinem anguli infinitesimi trianguli, erit differentia laterum ordinis, qui resultat ex ordine anguli infinitesimi trianguli summato cum ordine differentiae anguli obtusi a recto. Si tandem angulus sit finite obtusus, differentia erit ordinis anguli infinitesimi.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo obtusangulo A B C, si duo anguli A, & C sint infinitesimi ejusdem ordinis, omnia latera sunt ejusdem ordinis; differentia vero lateris A C obtuso angulo B oppositi a lateribus A B, B C obtusum angulum continentibus est infinitesima ordinis duplo majoris angulorum A, & C: viceversa si in triangulo obtusangulo A B C latera A B, B C, C A sunt ejusdem ordinis, & angulus B differat a duobus rectis quantitate infinitesima, erunt anguli A, & C infinitesimi ejusdem ordinis. Fig. 14.

Demonst. prima pars. Ex angulo obtuso B in basim A C demittatur normalis B S; haec respectu ad latus B C erit infinitesima ejusdem ordinis, ac est angulus C; similiter B S respectu A B est infinitesima ejusdem ordinis, ac est angulus A (1); sed anguli A, & C sunt ejusdem ordinis per suppositionem; ergo normalis B S est ejusdem ordinis, tum respectu B C, tum respectu B A; ergo

(1) per 9. prop.

latera B C, B A sunt ejusdem ordinis; quod tertium A C sit ejusdem ordinis, ac sunt B A, B C, per se clarum est. Patet igitur *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. B C differt a C S quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C, seu anguli A; similiter A B differt ab A S quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli A (1). Ergo B A + B C differt ab A C quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli A, vel C. *Q. E. S.*

(1) *per 9. prop.*

Pars tertia patet ex prima.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 14.

IN triangulo obtusangulo A B C, si duo anguli A, & C sint infinitesimi diversorum ordinum; erit latus B A oppositum angulo C infinitesimo ordinis superioris & ipsum infinitesimum; & quidem ejus ordo habetur, si subtrahatur ordo anguli A ab ordine anguli C. Latera vero B C, C A angulum infinite-

nitesimum C comprehendentia differunt quantitate A B. Viceversa si latus B A sit infinitesimum, & angulus B differat a duobus rectis quantitate infinitesima; erit angulus oppositus C infinitesimus: & quidem ejus ordo habetur, si summetur ordo lateris A B cum ordine anguli, quo differt angulus B a duobus rectis.

Demonst. prima pars. Ex angulo obtuso B in latus A C demittatur normalis B S. Ordo rectae B S respectu B C idem est, ac ordo anguli C (1). Ergo recta B S, ut evadat ejusdem ordinis, cujus est B C, transire debet per tot infinita, quot sunt unitates in numero ordinis anguli C; similiter recta B S respectu B A est infinitesima ejusdem ordinis, cujus est angulus A (2). Ergo B S, ut sit ejusdem ordinis, ac est B A, transire debet per tot infinita, quot sunt unitates in numero ordinis anguli A. Ergo recta A B, ut sit ejusdem ordinis, cujus est B C, transire debet per tot infinita, quot sunt unitates in differentia ordinis anguli A ab ordine anguli C. *Q. E. P.* De-

(1) *per 9. prop.*

(2) *per 9. prop.*

Demonst. secunda pars. Quoniam angulus A est infinitesimus, rectae A B, A S differunt quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli A relate ad A B, quemadmodum rectae C B, C S differunt quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C; ergo, cum A S, seu A B sit differentia laterum A C, S C, erit etiam differentia laterum A C, B C spretis nonnullis infinitesimis respectivis. *Q. E. S.*

Pars tertia patet ex prima.

PROPOSITIO XV.

Fig. 14. IN triangulo obtusangulo A B C, in quo sunt duo anguli A, & C infinitesimi diversi ordinis, erit differentia, quae intercedit inter latus A C obtuso angulo oppositum, & latera A B, B C obtusum angulum continentia, infinitesima ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinum angulorum A, & C.

Demonst. Differentia, quae intercedit inter A S, & A B est infinitesima ordinis

dinis duplo majoris anguli A (1) relate ad A B; ſed A B relate ad A C eſt infiniteſima ordinis, qui reſultat ex ſubtractione ordinis anguli A ab ordine anguli C (2). Ergo differentia, quae intercedit inter latera A S, A B, eſt infiniteſima ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinis anguli A, cum ordine anguli C (3). Differentia, quae intercedit inter latera B C, C S eſt infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C (4). Igitur, cum haec differentia infiniteſima ſit relate ad primam, erit illa differentia, quae intercedit inter latus A C, & latera A B, B C. *Q. E. D.*

(1) *per* 9. *prop.*

(2) *per* 14. *prop.*

(3) *per* 3. *prop.*

(4) *per* 9. *prop.*

PROPOSITIO XVI.

IN triangulo rectangulo, & acutangulo, in quo angulus unus eſt infiniteſimus, reliqui anguli pro aequalibus accipi poſſunt; minime vero in triangulo obtuſangulo, in quo angulus unus eſt infiniteſimus.

Prima pars patet ex natura trianguli rectan-

rectanguli, & ex corollario propositionis octavae. Altera pars per se est manifesta.

SCHOLION.

Haec propositio, licet per se clara, attamen sedulo perpendenda est; multum enim conducit ad evitandos paralogismos, dum agitur de quantitatibus infinitesimis. Etenim innuit, quod licet aliqua figura spretis quantitatibus infinitesimis possit habere nonnullas proprietates communes aliis figuris, nihilominus non sequitur illam habere omnes proprietates istarum figurarum. Sic, ex. gr., ex propositionibus IX., X., XI. spretis quantitatibus infinitesimis, quibus differunt latera angulum infinitesimum comprehendentia, sequitur latera illa esse aequalia; ac proinde triangula in hoc casu habere praecipuam proprietatem trianguli isoscelis: male ex hoc quis concluderet praedicta triangula habere omnes proprietates trianguli aequicruris; ut videre est potissimum in triangnlo

obtusan-

obtusangulo, in quo angulus unus est infinitesimus. Sic etiam per propositionem praesentem in triangulo rectangulo, in quo angulus unus est infinitesimus, reliqui anguli, spretis differentiis infinitesimis, sunt aequales. Ex hoc tamen colligendum non est, triangulum illud habere reliquas proprietates trianguli aequicruris; quod sic demonstro. Proprietas una trianguli aequicruris est, quod, ducta ex vertice in basim normale, basis bisecetur; haec proprietas non verificatur in triangulo rectangulo, in quo angulus unus est infinitesimus. Igitur omnes proprietates, quae de aliqua figura, spretis infinitesimis, adstruuntur, rigoroso ratiocinio sunt demonstrandae.

PROPOSITIO XVII.

IN triangulo A B C, in quo omnes anguli sunt finiti, si latus unum C B augeatur, vel minuatur infinitesima quantitate C D; dico angulum A oppositum augeri, vel minui, & angulum C ex Fig. 15.

 parte

parte fluxionis C D viceversa minui, & augeri quantitate infinitesima ejusdem ordinis; latus A C ex parte fluxionis C D, & totum triangulum B A C similiter augeri, vel minui quantitate infinitesima ejusdem ordinis.

Demonst. pars prima. Ex puncto C in A D, si opus est, productam demittatur normalis C R. Cum hypothenusa C D sit infinitesima, & anguli R C D, R D C sint finiti; erunt C R, R D infinitesimae ejusdem ordinis (1); adeoque angulus C A R est infinitesimus ejusdem ordinis (2), sicuti & triangulum C A D. Ergo angulus B A C auctus est, vel imminutus; & viceversa angulus A C B imminutus est, vel auctus quantitate C A D infinitesima ejusdem ordinis, ac est C D. *Q. E. P.*

(1) *per coroll.* 3. *prop.* 6.

(2) *per* 9. *prop.*

Demonst. secunda pars. Quoniam triangulum C A D est infinitesimum ejusdem ordinis, cujus est C D; erit triangulum B A C auctum, vel imminutum infinitesima quantitate ejusdem ordinis, cujus est C D; & cum A R non differat ab A C, nisi quantitate infinitesima ordi-

ordinis duplomajoris C R, seu C D (1), & R D sit infinitesima ejusdem ordinis, cujus est C D; hinc A C aucta est, vel imminuta quantitate infinitesima ejusdem ordinis, cujus est C D. *Q. E. S.*

(1) *per* 9. *prop.*

SCHOLION.

Facile demonstrari potest, si angulus B A C, aut triangulum B A C, manente latere A B, & angulo B, augeatur, vel minuatur infinitesima quantitate, etiam latus B C augeri, vel minui infinitesima quantitate ejusdem ordinis; ac proinde verificari inversam propositionem.

PROPOSITIO XVIII.

SI duo latera B D, B E trianguli B D E augeantur, vel minuantur proportionaliter infinitesima quantitate, etiam latus D E, & triangulum B D E augebitur, vel minuetur quantitate infinitesima ejusdem ordinis.

Fig. 16.

Prima pars patet.

Demonst. secunda pars. Triangulum D B E est ad triangulum A B C, ut quadratum B E est ad quadratum B C, seu ut B E ad M tertiam proportionalem post B E, B C; ergo dividendo trapetium D A C E est ad triangulum A B C, ut B E — M ad M; sed B E — M est infinitesima ejusdem ordinis, cujus est C E (1). Ergo trapetium D A C E est infinitesimum ejusdem ordinis, cujus est C E. *Q. E. S.*

(1) *per coroll. 3. prop. 2.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17. SI latera B D, B H rectanguli B A augeantur, vel minuantur infinitesima quantitate B G, B F, dico in primo casu rectangulum A B augeri rectangulis B D in B F, B H in B G, F B in B G; in altero casu minui rectangulis B D in B F, B H in B G minus rectangulo F B in B G.

Demonstratio utriusque partis patet ex sola inspectione figurae.

SCHO-

SCHOLION I.

Ex sola inspectione etiam figurae solidae, si adesset, constaret differentiale parallelepipedi facti a rectis A, B, C, auctis quantitatibus infinitesimis S, X, Z, esse parallelepipeda B A Z, B C S, A C X, S X C, X Z A, S Z B, S X Z. Hinc facile erui potest differentiale facti plurium quantitatum A, B, C, D, &c. contineri summa productorum ex singulis differentialibus quantitatum A, B, C, D, &c. in factum omnium quantitatum, exclusa illa, cujus est differentiale, una cum summa productorum ex omnibus ambis differentialium in factum omnium quantitatum, exclusis illis, quarum sunt differentialia ambi, & sic deinceps ex omnibus ternis, quaternis, quinternis, &c. usque ad factum omnium differentialium. Fig. 18.

SCHOLION II.

Cum autem summae productorum ex omnibus ambis, ternis, quaternis, &c. dif-

differentialium in facta respectiva quantitatum assignabilium, juxta scholion praecedens, sint infinitesimae relate ad summam productorum ex singulis differentialibus in factum omnium quantitatum assignabilium, exclusa illa, cujus est differentiale (positis tamen diferentiis ejusdem ordinis); hinc summae illae relate ad hanc spernuntur. Verum aliquando evenit, ut summa haec sit nulla, & in hoc casu non erit spernenda summa productorum ex omnibus ambis &c.; & si haec pariter sit nulla, tunc non erit despicienda summa productorum ex omnibus ternis &c., & sic deinceps usque ad ultimum factum ex omnibus differentialibus. En exemplum, quo declaratur quomodo fieri possit, ut factum ex singulis differentialibus &c. sit nullum: latus B D quadrati A B minuatur infinitesima quantitate B G; erit quadratum A B imminutum rectangulo infinitesimo H G ordinis G B: latus L G augeatur infinitesima quantitate G F aequali B G; rectangulum A G auctum erit rectangulo D F infinitesimo ordinis G F; sed

Fig. 17.

rectan-

rectangulum H G excedit rectangulum G E quadrato G B infinitesimo relate ad ipsa rectangula. Ergo differentia ordinis G B evadit nulla, & remanet differentia ordinis duplo majoris G B. Verum haec clarius per analysim infinitesimorum comprehenduntur.

PROPOSITIO XX.

Potentiae eaedem rectarum A B, D C, quae differunt quantitate infinitesima L A, & ipsae differunt quantitate infinitesima ejusdem ordinis; & viceversa. Fig. 19.

Demonst. prima pars. Potentia rectae A B est ad potentiam rectae D C, ut B A ad unam M ex continue proportionalibus post B A, D C in serie finita; ergo dividendo potentia B A minus potentia D C est ad potentiam D C, ut B A minus M ad M. Sed B A minus M est infinitesima ejusdem ordinis L A (1). Ergo differentia potentiarum est infinitesima ejusdem ordinis. *Q. E. D.*

(1) *per coroll. 3. prop. 2.*

Pars

Pars ſecunda fere eodem modo demonſtratur.

COROLLARIUM.

Hinc differentiae quadratorum, circulorum, cuborum, ſphaerarum habentium radices, vel radios, qui differunt quantitate infiniteſima, erunt & ipſae infiniteſimae ejuſdem ordinis.

SCHOLION.

Haec propoſitio applicari etiam poteſt polygonis ſimilibus, quorum latera relative differunt quantitate infiniteſima, tum ejuſdem ordinis, tum diverſorum; ſed in hac ultima ſuppoſitione aliqua cautio eſt adhibenda; etenim ad evitandos paralogiſmos juvat recurrere ad quadrata totius periphaeriae polygonorum, vel ad quadrata laterum, quae differunt quantitate infiniteſima ordinis inferioris. Ratio hujus rei invenietur, ſi polygona in triangula ſimilia dividantur, & ſi reiterentur propoſitiones XIX. & XX. libri

ſexti

sexti Euclidis: & hìc rursus adverto non esse praecipitoso ratiocinio concludendum, figuras, quae, spretis infinitesimis, habent aliquam proprietatem aliis communem, habere etiam omnes; sed prius videndum est, num differentiae illae infinitesimae turbent demonstrationes, quibus probatur unam ab alia profluere.

APPENDIX.

QUoniam rectae a vero parallelismo declinantes quantitate infinitesima, acceptae a minus cautis pro parallelis facilem viam sternant ad paralogismos; hinc proposueram supprimere phrasim illam: *accipi possunt, ut parallelae:* contentus dumtaxat monuisse, recursum esse habendum ad doctrinam triangulorum expositam, ex qua pendet illa rectarum parallelarum, quando istarum proprietates examinandae occurrunt cum differentiis infinitesimis. Verum, ut clarius paralogismorum fontes adpareant, operae pretium duxi sequentia, in hac appendice, de rectis parallelis exponere.

Fig. 20. Parallelismus rectarum A X, D Y duas conditiones comprehendit. Prima est, quod in utramlibet partem quamtumvis productae nunquam concurrant. Altera est, quod distantiae duae, ubi vis, sumptae A D, Z E aequales plane sint. Hinc omnes parallelarum proprietates ducuntur.

Declinabunt lineae rectae A X, D Y a parallelismo infinite parum, si inclinetur A X sic, ut transeat in A T, sitque angulus X A T infinitesimus. Quo posito concurrent A T, D T ad distantiam infinitam E T, & distantiae A D, C E different differentia infinitesima Z C, sive A B. Censebuntur autem A T, D T habere utramque parallelismi conditionem: primam, quia ad nullam assignabilem distantiam concurrunt: alteram, quia distantiae A D, C E pro aequalibus, cum differentia sit infinitesima, haberi possunt.

In hoc autem illud excipe: si, sumpta D R infinita, minori tamen, quam D T, notaretur distantia V R; differentia profecto inter A D, & V R esset assi-

assignabilis; neque profecto distantiae A D, V R possent haberi pro aequalibus.

Quare donec intervallum D E inter distantias A D, C E erit assignabile, distantiae ipsae A D, C E haberi poterunt pro aequalibus, & tractus A C, D E servabunt alteram parallelismi conditionem; sed si intervallum D R sit infinitum, quoniam distantiae A D, V R nequaquam pro aequalibus haberi poterunt, tractus A V, D R carebunt secunda conditione parallelismi, primam conditionem servabunt; est enim angulus T infinitesimus, ideoque distantia R T, ad quam concurrunt A V, D R, infinita sit oportet, si cum R V comparetur. Igitur si lineas rectas parallelas ex prima conditione definias, erunt A V, D R parallelae; si ex secunda, non erunt. Si qui autem de parallelismo rectarum A V, D R contendere velit, videat, ne quaestionem de nomine instituat.

Illud vero ad rem maxime pertinet. Rectae A V, D R (sive parallelae dicantur, sive non) hoc certe habent,

quod, ducta, ubi vis, G L, quae secet A V in G, D R in L, anguli alterni D L G, L G T sunt aequales; nam, cum angulus D L G, ut externus, sit aequalis duobus internis, & oppositis L G T, L T G, sitque L T G infinitesimus, potest D L G aequalis censeri angulo L G T. Habent ergo lineae rectae A V, D R hanc utique proprietatem, aliasque, quae maxime in parallelis celebrari solent; quaeque non ex aequalitate distantiarum A D, V R pendent, sed ex sola infinita parvitate anguli T.

Haec hactenus dixi ponens A B quidem infinitesimam, C B vero, & C E assignabiles. Videamus jam parallelismo quid fiat, si tres rectae A B, C B, C E ponantur vel omnes infinitesimae, vel tantum aliquae. Fortasse expedientur omnia quatuor Theorematis.

THEO-

THEOREMA I.

SI sit A B infinitesima, tum respectu C B, tum respectu C E, tractus A C, D E habere censebuntur utramque parallelismi conditionem. Primam, quia, cum sit A B infinitesima respectu C B, erit infinitesimus angulus A C B; ergo etiam angulus T; ergo erit E T infinita respectu E C; ergo A C, D E concurrent ad distantiam infinitam. Secundam, quia, cum A B infinitesima sit respectu C E, poterunt A D, C E haberi pro aequalibus.

SCHOLION.

Si sumpseris E R infinitam respectu E C, sed minorem, quam T E, ac notaveris distantiam R V; tractus A V, D R habebunt primam conditionem parallelismi propter angulum infinitesimum T. Non habebunt secundam; nam, ut patet, non poterunt A D, V R sumi pro aequalibus.

SCHO-

SCHOLION ALTERUM.

Quamvis A V, D R careant secunda conditione parallelismi, tamen si G L secet A V in G, D R in L, erunt anguli alterni G L D, L G T aequales; scilicet propter angulum infinitesimum T.

THEOREMA II.

SI sit A B infinitesima respectu C B, non vero respectu C E; tractus A C, D E habebunt primam conditionem parallelismi, non vero secundam. Habebunt primam, quia, cum sit A B infinitesima respectu C B, erit angulus A C B infinitesimus; ergo etiam angulus T erit infinitesimus; ergo erit E T infinita respectu E C; ergo lineae A C, D E concurrent ad distantiam infinitam. Non habebunt secundam, quia cum A B non sit infinitesima respectu C E, non poterunt A D, C E sumi pro aequalibus.

SCHOLION.

Ubicumque tamen ducatur G L secans A T in G, D T in L, anguli alterni G L D, L G T erunt aequales propter angulum infinitesimum T.

THEOREMA III.

Si sit A B infinitesima respectu C E, non vero respectu C B; tractus A C, D E carebunt prima conditione parallelismi; habebunt secundam &c.

Carebunt prima, quia cum A B non sit infinitesima respectu C B, angulus A C B erit assignabilis; ergo etiam angulus T; ergo E T non erit infinita respectu E C; ergo A C, D E non concurrent ad distantiam infinitam. Habebunt secundam, quia, cum sit A B infinitesima respectu C E, poterunt A D, C E haberi pro aequalibus.

SCHOLION.

Ubicumque ducatur G L, ut ſupra, anguli alterni minime pro aequalibus haberi poterunt, cum ſit angulus T aſſignabilis.

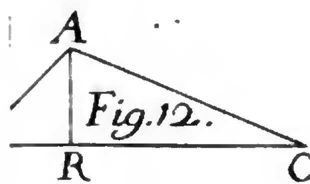
THEOREMA IV.

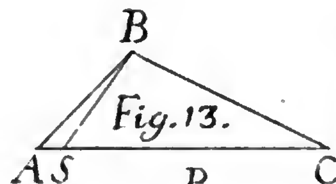
SI A B non ſit infiniteſima neque reſpectu C B, neque reſpectu C E; tractus A C, D E neutram habebunt paralleliſmi conditionem.

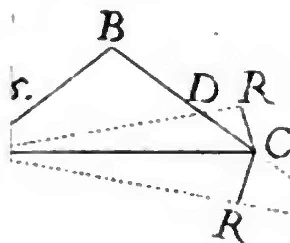
Ac ducta G L, ut ſupra, anguli alterni minime ſumi poterunt pro aequalibus.

Haec ſatis patent ex dictis.

ELEMEN-







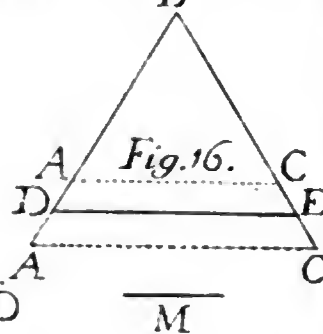


Fig. 18.

A ———— S

B ———— X

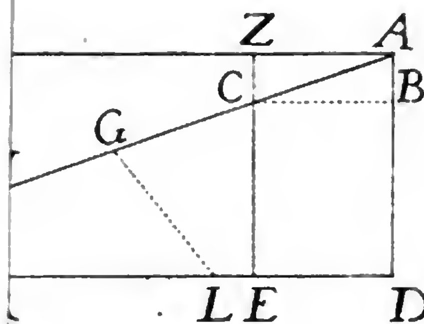
C ———— Z

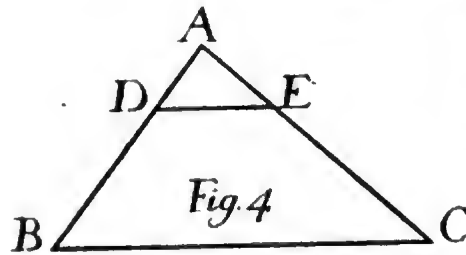
A —L———— B

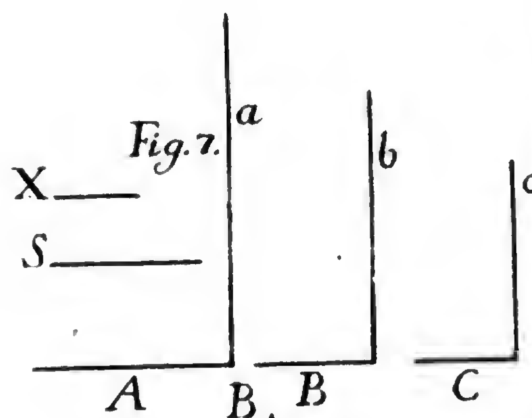
Fig. 19.

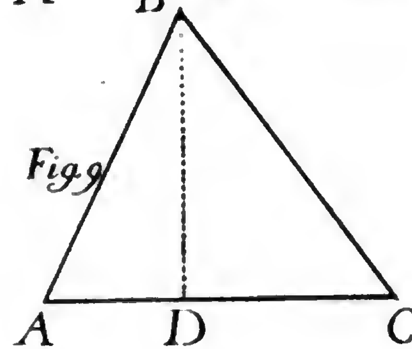
D ———— C

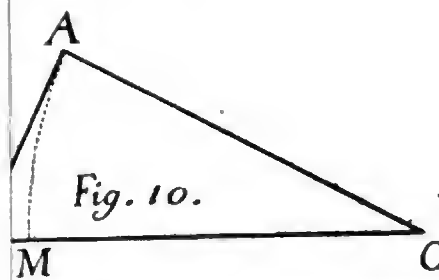
M




A
Fig.2.
B


A
D
E
Fig.4
B
C

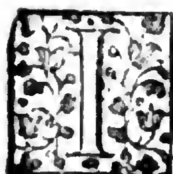

Fig.7.
a
b
c
X
S
A
B
C


B
Fig.9
A
D
C

A
Fig.10.
M
C

ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO I.

N circulo, posito arcu C M infinitesimo cujuscunque ordinis, erunt tangens C S, chorda C M, sinus rectus L M infinitesima ejusdem ordinis; pars S M secantis B S supra radium B M, & sinus versus C L erunt infinitesima ordinis duplo majoris anguli C B M, seu arcus C M. Fig. 1.

Demonst. prima pars. Cum arcus C M sit infinitesimus, erit angulus C B M infinitesimus ejusdem ordinis (1); sed anguli B C M, B M C, & B C S, C S B sunt finiti; ergo S C, C M, M L sunt infinitesima ejusdem ordinis anguli C B M, seu arcus C M relate ad diametrum finitam C B (2). *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. In triangulo rectangulo B C S, quia angulus C B S est infinitesimus, erit M S ordinis duplo majoris tangentis C S (3), seu arcus C M; ergo quia L M parallela est

(1) *per* 5. *prop. lib.* 1.

(2) *per prop.* 9. *&* 10. *lib.* 1.

(3) *per prop.* 9. *lib.* 1.

C S, erit C L infinitesima ordinis duplo majoris arcus C M. *Q. E. S.*

COROLLARIUM.

B M est ad B L, ut M S est ad C L; dividendo C L est ad L B, ut M S — C L est ad C L; sed C L est infinitesima ordinis duplo majoris arcus C M; ergo differentia inter M S, & C L est ordinis duplo majoris ordinis rectae C L, seu quadruplo majoris arcus C M.

SCHOLION.

Claritatis gratia in decursu hujus libri suppono arcum C M esse infinitesimum primi ordinis, licet demonstrationes extendi possint ad ordines superiores, ut attendenti patebit.

PRO-

PROPOSITIO II.

IN circulo, posito arcu M N infinitesimo primi ordinis, segmentum M X N terminatum ab arcu M X N, & ejus chorda M F N, & trilineum M X N C terminatum ab arcu M X N, tangente M C, & intercepta C N, erunt infinitesima tertii ordinis. Fig. 2.

Demonst. prima pars. Ex centro S ducatur S F X normalis ad M N, conjungantur M X, X N; erit F X secundi ordinis infinitesimorum (1). Ergo rectangulum M N in F X erit infinitesimum tertii ordinis (2); sed segmentum M X N F mediat inter rectangulum M N in F X, & triangulum M X N, seu dimidium praedicti rectanguli. Igitur, cum rectangulum M N in F X, & ejus dimidium M X N sint infinitesima tertii ordinis, erit etiam segmentum M X N F & ipsum infinitesimum tertii ordinis. *Q. E. P.*

(1) *per primam propositionem.*
(2) *per prop. 4. lib. 1.*

Demonst. secunda pars. Ex puncto N ducatur tangens L N; erunt M L, L N aequales; similiter L N, & L C non dif-

differunt nisi quantitate infinitesima respective; nam in triangulo rectangulo L N C angulus N L C est infinitesimus; ergo etiam L C non differt ab L M nisi quantitate infinitesima respective; ac proinde triangula C M N, L N C sunt ejusdem ordinis; sed triangulum M N C est infinitesimum secundi ordinis relate ad triangulum C M S, seu infinitesimum tertii relate ad quantitatem assignabilem. Ergo triangulum N L C est infinitesimum tertii ordinis: cum autem trilineum M X N C mediet inter triangulum M C N, & triangulum L C N, erit & ipsum infinitesimum tertii ordinis. *Q. E. S.*

PROPOSITIO III.

Fig. 3. IN circulo, posito arcu N M infinitesimo primi ordinis, tangens M C, arcus M N, chorda M N, sinus rectus G N differunt quantitate infinitesima tertii ordinis.

Demonst. Tangens M C, arcus M N,

chor-

chorda MN sunt, ut triangulum MSC, sector circuli MSNX, & quadrilaterum SMXN; sed ista differunt quantitate infinitesima tertii ordinis; nam trilineum MXNC, & segmenta MX, XN sunt infinitesima tertii ordinis (1). Ergo & illa differunt quantitate infinitesima tertii ordinis; cum omnes termini tam in prima, quam in secunda serie sint infinitesimi primi. Quod chorda MN excedat sinum rectum NG infinitesima quantitate tertii ordinis patet (2). *Q. E. D.*

(1) *per* 2. *prop.*

(2) *prop.* 9. *lib.* 1.

PROPOSITIO IV.

IN Triangulo ABC obtusangulo, in quo duo anguli A, & C sunt infinitesimi, erunt latera AB, BC in ratione angulorum oppositorum. Fig. 4.

Demonst. Per punctum C ducatur CL parallela ad AB, quæ concurrat cum BS (normali ex angulo obtuso B ad rectam AC) producta in L, & centro C intervallo CS describatur arcus MSN. Recta AB est ad rectam BC, ut AS est

(1) prop. 9. lib. 1.
(2) per 3. prop.

est ad S C (1), seu ut B S est ad S L, seu ut arcus S M est ad arcum S N (2), seu ut angulus B C A est ad angulum A C L, seu ut angulus B C A est ad angulum A. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Hinc duo triangula rectangula A S B, C S B, quae habent eandem altitudinem, & angulum isti oppositum infinitesimum, habent etiam bases A S, S C; ac proinde hypothenusas A B, B C in ratione reciproca angulorum infinitesimorum.

COROLLARIUM II.

Fig. 5. 6. 7. 8.

Quin immo si duo triangula A L M, O B C habeant duo latera A L, B O aequalia, angulos A L M, O B C circumjacentes lateribus A L, B O habeant similiter aequales, & angulos M, & C praedictis lateribus oppositos habeant infinitesimos; habent etiam latera L M, C B, & A M, O C in ratione reciproca angulorum infinitesimorum.

Ete-

Etenim ex punctis A, & O ducantur normales A Q, O P ad rectas L M, C B productas, si opus est; cum anguli M L A, C B O sint aequales, & anguli Q, & P sint recti, erunt etiam aequales anguli L A Q, B O P; adeoque in triangulis Q A L, B O P, cum sint etiam rectæ A L, B O aequales, erunt etiam aequales normales A Q, O P; hinc latera A M, O C, & Q M, P C sunt in ratione reciproca angulorum infinitesimorum M, & C; sed Q M non differt ab L M, P C non differt a B C; ergo etiam L M, B C sunt in ratione reciproca angulorum infinitesimorum M, & C.

SCHOLION.

Advertendum est hanc propositionem cum suis corollariis verificari, spretis nonnullis differentiis infinitesimis, non vero absolute.

PROPOSITIO V.

Fig. 3. POsitis, quae supra posuimus propositione tertia, differentia sinus recti G N a chorda M N non differt a quarta parte differentiae sinus recti G N a tangente M C.

Demonst. Ex puncto N ducatur N R normalis ad tangentem M C, erit R C differentia sinus recti a tangente: tum centro M intervallo M N abscindatur M Q a tangente M C, erit R Q differentia sinus recti a chorda. Cum S M sit ad M C, ut N R ad R C, erit rectangulum S M in R C aequale rectangulo M C in R N: similiter cum M Q + M R sit ad R N, ut R N ad R Q, & M Q + M R non differat a 2 M R, seu a recta O N, hinc ratio O N ad N R non differt a ratione N R ad R Q; sed ratio O N ad N R, seu ad G M, eadem est, ac ratio 2 G A ad G N, seu M R. Ergo ratio 2 G A ad M R non differt a ratione N R ad R Q; sed ratio 2 G A ad M R non differt a ratio-

ratione 2 M A ad M R, & ratio 2 M A ad M R non differt a ratione 2 M A ad M C. Ergo ratio 2 M A ad M C non differt a ratione R N ad R Q; adeoque rectangulum 2 M A in R Q non differt a rectangulo M C in R N, seu a rectangulo S M in R C; & per consequens 2 M A est ad M S, ut R C ad R Q; sed M S est quarta pars 2 M A. Ergo R Q non differt a quarta parte R C. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc differentia sinus recti G N a chorda M N non differt a tertia parte differentiae chordae M N a tangente M C.

PROPOSITIO VI.

Sit A O S M quadrans circuli C M L, in radio A O sumantur duo puncta P, Q, per quae ducantur duae ordinatae normales ad A O, & intercipientes Fig. 9.

arcum M N infinitesimum primi ordinis, dissitum ab extremitatibus quadrantis A S arcubus finitis M A, N S; dico differentiam abscissarum A P, A Q, & ordinatarum P M, Q N esse quantitatem infinitesimam primi ordinis.

Demonst. Ordinata N Q producatur usquedum concurrat cum circulo in L, & ex puncto M ducatur M G parallela ad radium A O, quæ producatur usquedum concurrat cum circulo in C; erit P Q, seu G M differentia abscissarum A P, A Q, & G N erit differentia ordinatarum P M, Q N. Cum ex hypothesi arcus N S, M A sint finiti, erunt etiam arcus C N, L M finiti; hinc anguli C M N, L N M sunt finiti; adeoque in triangulo rectangulo M G N omnes anguli sunt finiti, & per consequens latera M N, M G, G N sunt ejusdem ordinis (1); sed arcus M N, ac proinde chorda M N est infinitesima primi ordinis per suppositionem. Ergo etiam latera M G, G N, seu differentia ordinatarum, & abscissarum erit infinitesima primi ordinis. *Q. E. D.*

(1) *per corol.* 3. *prop.* 6. *Lib.* I.

CO-

COROLLARIUM.

Si arcus N S sit infinitesimus, erit arcus M S infinitesimus primi ordinis; ac proinde arcus C S cum arcu N S, seu arcus C N erit infinitesimus primi ordinis; hinc angulus C M N erit infinitesimus primi ordinis; adeoque G N respectu N M erit infinitesima primi ordinis (1); sed N M est infinitesima primi ordinis; ergo G N erit infinitesima secundi ordinis. Si vero arcus M A sit infinitesimus, erit arcus A N, ac proinde arcus L A infinitesimus primi ordinis; adeoque etiam arcus L M, & per consequens angulus L N M erit infinitesimus primi ordinis; ergo G M respectu M N erit infinitesima primi ordinis (2); sed M N est infinitesima primi ordinis; ergo G M erit infinitesima secundi ordinis.

(1) *per 9. prop. lib.* 1.

(2) *per 9. prop. lib.* 1.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Fig. 10. SIt M S arcus circuli L M N infinitesimus primi ordinis, cui subftendatur chorda M S; per punctum M ducatur M R tangens circulum, & per punctum S ducatur utcumque recta N S secans circulum extra arcum infinitesimum M S, & concurrens cum tangente M R; dico angulum M S R factum a chorda M S cum secante N S producta vel esse infinitum, vel infinitesimum primi ordinis; angulum N R M factum a secante N R, & tangente M R vel esse finitum, vel infinitesimum cujuscunque ordinis; ac tandem angulum S M R factum a chorda S M, & tangente M R esse infinitesimum primi ordinis.

Demonst. prima pars. Tota peripheria circuli est mensura duorum rectorum ad peripheriam ipsam; cum igitur arcus N A M sit mensura anguli N S M, seu duorum S M R, S R M, erit arcus N S M mensura anguli M S R; sed arcus N S M vel est finitus, vel infi-

infinitesimus primi ordinis; quia ad minimum semper remanet arcus M S infinitesimus primi ordinis; ergo angulus M S R vel erit finitus, vel infinitesimus primi ordinis. *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. Ex arcu N M abscindatur arcus N X aequalis M S, & conjungantur puncta X, S; erit angulus N S X aequalis angulo S M R; cum igitur arcus N M sit mensura duorum angulorum S M R, S R M, & arcus N X sit mensura anguli N S X, seu S M R; erit arcus X M mensura anguli N R M; sed arcus X M potest esse finitus, & infinitesimus cujuscunque ordinis; ergo angulus N R M potest esse finitus, & infinitesimus cujuscunque ordinis. *Q. E. S.*

Pars tertia patet; cum arcus M S infinitesimus primi ordinis sit mensura anguli S M R.

COROLLARIUM.

Cum arcus X A M, N S M sint mensura angulorum M R S, M S R; hinc si ar-

ſi arcus X A M, & N S M ſint finiti, & aequales, erunt etiam anguli M R S, M S R aequales: ſi vero ſunt finiti, ſed differunt quantitate infiniteſima; & tunc anguli M S R, M R S ſunt pariter finiti, & differunt quantitate infiniteſima: vel tandem arcus ſunt finiti, ſed differunt quantitate finita; & tunc anguli M R S, M S R ſunt finiti, & eorum differentia erit finita, hoc eſt unus erit obtuſus. In prima ſuppoſitione S R intercepta inter circulum, & tangentem erit ſecundi ordinis, & differentia inter M S, M R erit abſolute nulla; in ſecunda ſuppoſitione intercepta S R erit ſecundi ordinis, & differentia inter M S, M R poteſt eſſe cujuſcunque ordinis incipiendo a tertio; in tertia tandem ſuppoſitione intercepta S R erit ſecundi ordinis, & differentia inter M S, M R erit ſimiliter ſecundi ordinis: quod totum patet ex ſcholio propoſitionis XII. Lib. primi. Si vero arcus X A M, vel N S M ſunt infiniteſimi primi ordinis, erit angulus M R S, vel M S R infiniteſimus primi ordinis; hinc S R, S M,

M R

M R in hac ſuppoſitione erunt infiniteſimae primi ordinis ; & differentia inter M S, & M R erit ejuſdem ordinis (1). Si tandem arcus X A M ſit infiniteſimus ordinis ſuperioris, erit angulus R infiniteſimus ordinis ſuperioris ; adeoque S R reſpectu S M poteſt eſſe infiniteſima cujuſcunque ordinis (2).

(1) *prop.* 13. *lib.* 1.

(2) *per prop.* 14. *lib.* 1.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 11.

SIt quadrans circuli A B C, ducanturque ordinatae P M, Q N productae uſquedum concurrant cum circulo in T, & S, quaeque intercipiant arcum M N infiniteſimum primi ordinis ; tum per punctum M ducatur tangens M O, quae concurrat cum Q N producta in O. Si arcus A M, N C ſunt finiti, vel ſi arcus A M eſt infiniteſimus cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo a ſecundo (ducta ex M normali M R ad Q O); ratio Q O ad O R non differt a ratione Q N ad N R: ſi vero arcus N C ſit infiniteſimus cujuſcunque

ordinis, vel A M ſit primi, tunc ratio Q O ad O R differt a ratione Q N ad N R.

Demonſt. prima pars. Si arcus A M, N C ſunt finiti, erunt etiam finiti arcus T A M, S N M; hinc cum arcus T A M ſit menſura anguli S O M, & arcus S N M ſit menſura anguli M N O, erunt etiam finiti anguli M O N, M N O; igitur cum angulus N M O ſit infiniteſimus primi ordinis, erit intercepta N O infiniteſima ſecundi ordinis (1); ſed R N eſt infiniteſima primi ordinis (2); ergo Q N non differt a Q O, neque R N differt ab R O; & per conſequens ratio Q O ad R O non differt a ratione Q N ad N R (3). *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. Quoniam arcus A M eſt infiniteſimus cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo a ſecundo, erit recta P M infiniteſima ejuſdem ordinis (4); ſed Q N eſt infiniteſima primi ordinis per ſuppoſitionem; ergo P M, ſeu Q R eſt infiniteſima reſpectu R N; adeoque ratio Q N ad N R non differt a ratione aequalitatis; & multo magis

(1) *per doctrinam triangulorum lib. 1.*

(2) *per 6. prop.*

(3) *per prop. 1. lib. 1.*

(4) *per 1. prop.*

gis non differt a ratione aequalitatis ratio Q O ad O R; adeoque ratio Q O ad O R non differt a ratione Q N ad N R. *Q. E. S.*

Demonst. tertia pars. Si arcus N C est infinitesimus cujuscunque ordinis, erunt arcus T A M, S N M finiti, ac proinde erunt etiam finiti anguli M O N, O N M; hinc N O erit infinitesima secundi ordinis (1); sed R N est pariter infinitesima secundi ordinis (2); ergo ratio Q O ad O R differt a ratione Q N ad N R. *Q. E. T.*

Demonst. quarta pars. Si tandem arcus A M est infinitesimus primi ordinis, erit N O infinitesima primi ordinis (3); sed R N est infinitesima primi ordinis (4). Ergo R N, N O sunt infinitesimae ejusdem ordinis; & per consequens ratio Q O ad O R differt a ratione Q N ad N R. *Q. E. Q.*

(1) *per doctrinam triangulorum lib. 1.*

(2) *per coroll. prop. 6.*

(3) *per coroll. prop. 7.*

(4) *per 6. prop.*

COROLLARIUM.

Si arcus N C sit infinitesimus cujuscunque ordinis, erunt rectae R N, R O

 in-

(1) *per coroll. prop. 6., & 7.* infinitesimae secundi ordinis (1), & R M infinitesima primi ordinis, tandem Q N, Q O erunt finitae. Ergo quarta proportionalis post N R, N Q, R M; vel post O R, O Q, R M erit infinita. Si arcus A M sit infinitesimus primi ordinis, erit R M secundi ordinis; Q N, N R, & R O, Q O sunt infinitesimae primi ordinis (2). Ergo quarta proportionalis post Q N, N R, R M, vel post Q O, O R, R M erit infinitesima secundi ordinis.

(2) *per coroll. prop. 6.*

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. POsitis, quae supra posuimus propositione praecedenti, dico triangulum M R N sumi posse pro triangulo M R O ad determinandam subtangentem circuli.

Demonst. Si arcus A M, & N C sunt finiti, vel si arcus A M sit infinitesimus cujuscunque ordinis superioris, incipiendo a secundo, tunc ratio Q N ad N R non differt a ratione Q O ad O R (3); adeoque quarta proportionalis post R N,

(3) *per 8. prop.*

Q N,

Q N, R M non differt a quarta proportionali post Q O, O R, R M, hoc est, non differt a subtangente. Si vero arcus N C sit infinitesimus cujuscunque ordinis, vel A M sit primi, cum quarta proportionalis in primo casu sit infinita, & in secundo casu infinitesima secundi ordinis, quodcunque ex illis duobus triangulis sumatur; hinc patet &c. *Q. E. D.*

SCHOLION.

In ultima suppositione, licet quarta proportionalis inventa per triangulum N R M sit infinita, aut infinitesima, quemadmodum etiam subtangens, attamen in se multum discrepant; quod sequenti exemplo demonstro. Sit quadrans circuli V Q N M, in radio V Q sumatur Q P infinitesima primi ordinis, tum per punctum P ducatur P M parallela ad Q N, per punctum M ducatur tangens X M T, quae cum Q N producta concurrat in T, & cum Q V producta concurrat in X; deinde ducatur chorda N M, quae concurrat cum Q V produ- Fig. 12.

ſta in S; tandem per punctum M ducatur M R parallela ad Q V. Eſt proprietas circuli notiſſima, quod angulus R M N aequalis ſit angulo N M T, ac proinde ratio T M ad R M eadem eſt, ac ratio T N ad N R; ſed ratio T M ad M R non differt a ratione aequalitatis (1). Ergo ratio T N ad N R non differt a ratione aequalitatis; ac proinde recta R N non differt a dimidio rectae R T. Praeterea in triangulo Q N S erit Q S ad R M, ut Q N ad N R; ac proinde rectangulum Q S in R N eſt aequale rectangulo Q N in R M: ſimiliter rectangulum Q X in R T eſt aequale rectangulo Q T in R M; ſed rectangulum Q N in R M non differt a rectangulo Q T in R M. Ergo etiam rectangulum Q S in R N non differt a rectangulo Q X in R T; & per conſequens ratio R N ad R T non differt a ratione Q X ad Q S; ſed R N non differt a dimidia parte rectae R T. Ergo etiam Q X non differt a dimidia parte rectae Q S; ſed Q X eſt vera ſubtangens. Ergo in hac ſuppoſitione, vera ſub

tan-

(1) *per 3. prop.*

tangens, licet infinita, tamen est dimidia subtangentis suppositae Q S. Quod animadversione dignum est.

PROPOSITIO X.

IN arcu F L infinitesimo primi ordinis sumatur arcus P Q infinitesimus cujuscunque ordinis superioris, tum per L ducatur L X tangens circulum, & per puncta P, & Q ducantur normales P E, Q K ad diametrum B A C, quae ex chorda F L abscindant partem M N, & productae in X, & Z abscindant X Z ex tangente L X; oportet determinare differentiam chordae P Q a recta M N, tum differentiam ejusdem chordae P Q a recta X Z. Fig. 13.

Const. Per punctum Q ducatur Q O parallela ad rectam F L, quae producta concurrat cum E P producta similiter in O; per punctum vero X ducatur X R parallela ad rectam P Q, quae concurrat cum K Q producta in R; efformata jam erunt duo triangula P Q O, X Z R,

ex quorum determinatione dependet solutio problematis: nam ex determinatione trianguli P Q O eruitur differentia inter rectas P Q, Q O, seu inter rectas P Q, M N; ex determinatione trianguli X R Z eruitur differentia inter rectas X Z, X R, seu inter rectas X Z, P Q. Determinationes autem triangulorum P Q O, X Z R dependent in primis ex ordine rectae P Q, seu X R, tum ex determinatione angulorum P Q O, Z X R, hoc est, ex angulo aberrationis rectae P Q a parallelismo cum recta F L, & ex angulo aberrationis ejusdem rectae P Q a parallelismo cum tangente L X; tandem dependent ex determinatione angulorum O P Q, X R Z, seu anguli P Q Y, seu arcus P Y. *Q. E. F.*

COROLLARIUM.

Sit arcus P Q infinitesimus secundi ordinis, erit similiter chorda P Q infinitesima secundi ordinis (1); arcus P F sit absolute nullus, & in hac suppositione punctum P coincidit cum puncto F, ac

(1) *per* 1. *prop.*

ac proinde ob parallelismum rectarum Q O, F L efformatur angulus L F Q aequalis angulo P Q O; sed angulus L F Q est infinitesimus primi ordinis, quia insistit arcui Q L infinitesimo primi ordinis. Ergo etiam angulus P Q O erit infinitesimus primi ordinis. In hisce determinationibus, vel arcus P Y erit infinitesimus secundi ordinis, (nam ad minimum semper remanet arcus P Q infinitesimus secundi ordinis, ac proinde evanescente arcu P B remanet B Y infinitesimus secundi ordinis); vel arcus P Y est infinitesimus primi ordinis, vel est finitus, sed minor semicirculo quantitate finita, vel minor semicirculo quantitate infinitesima, vel aequalis perfecte semicirculo, vel major quantitate infinitesima, vel major quantitate finita, vel discrepans a circulo quantitate infinitesima primi ordinis, vel quantitate infinitesima secundi ordinis; & tunc angulus P Q Y, seu O P Q, vel erit infinitesimus secundi ordinis, vel erit infinitesimus primi ordinis, vel erit finitus, & acutus, vel finitus, & rectus,

vel finitus, & obtusus discrepans a recto, quantitate infinitesima, vel obtusus discrepans a recto quantitate finita, vel obtusus discrepans a duobus rectis quantitate infinitesima primi ordinis, vel obtusus minor duobus rectis quantitate infinitesima secundi ordinis; in omnibus hisce casibus facile est determinare per doctrinam triangulorum expositam in primo libro differentiam inter P Q, & O Q, seu M N. Eadem est methodus, si arcus F P sit infinitesimus cujuscunque ordinis, quemadmodum etiam arcus P Q sit infinitesimus cujuscunque ordinis. Quidquid dictum est de hoc triangulo P Q O, idem dicito de triangulo X Z R, quod inservit ad determinandam differentiam inter rectas X Z, X R, seu P Q.

PROPOSITIO XI.

Fig. 14. SIt C D arcus circuli infinitesimus primi ordinis, in quo sumatur arcus N M infinitesimus cujuscunque ordinis supe-

ſuperioris; per punctum D ducatur D B tangens circulum, tum ex centro A per puncta M, & N ducantur rectae A N B, A M Z, quae ex chorda C D abſcindant partem P Q, ex tangente vero D B abſcindant partem B Z. Oportet determinare differentiam inter chordam M N, & rectam P Q, tum differentiam inter eandem chordam M N, & rectam B Z.

Conſt. Ex punctis Z, & P ducantur Z X, P O parallelae ad chordam M N; efformata jam erunt duo triangula P Q O, X Z B; ex determinatione primi trianguli eruitur differentia inter P Q, & P O, ex determinatione ſecundi trianguli eruitur differentia inter rectas B Z, & Z X: differentia vero inter rectas P O, & M N, inter M N, & Z X facile erui poteſt ex interceptis M P, & M Z; cum P O, M N, Z X ſint parallelae. *Q. E. F.*

COROLLARIUM.

Facile dignosci potest differentiam inter rectas M N, P Q, & inter rectas M N, B Z esse semper infinitesimam respective ad ipsas; nam P Q non potest differre a P O nisi per quantitatem infinitesimam respectivam, cum angulus Q P O sit semper infinitesimus, & anguli P O Q, O Q P sint semper finiti; similiter P O non potest differre ab M N nisi quantitate infinitesima respective, nam intercepta P M semper esse debet infinitesima. Idem dicito de rectis M N, X Z, & B Z.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. SIt E B arcus circuli infinitesimus primi ordinis, E B sit ejus chorda, E N sinus rectus; dico segmentum sphaericum E B F genitum ab arcu E B, dum semicirculus D E B rotatur circa diametrum D B, non differre a cono sexquialtero coni E B F geniti in eadem rota-

rotatione a triangulo rectangulo ENB, nisi quantitate infinitesima sexti ordinis.

Demonst. Segmentum sphaericum EBF aequatur cono, cujus basis est circulus radii NE, altitudo vero est NO composita ex intercepta NB, & BO quarta proportionali post rectas ND, CD, NB, per theoremata Archimedis; sed CD non differt a dimidia ND, nisi quantitate infinitesima secundi ordinis, nam DB non differt a DN, nisi quantitate NB infinitesima secundi ordinis. Ergo pariter dimidia DB, seu DC non differt a dimidia ND, nisi quantitate infinitesima secundi ordinis; adeoque BO non differt a dimidia NB nisi quantitate infinitesima secundi ordinis respective, ac proinde NO non differt a parte sexquialtera rectae NB, nisi quantitate finitesima secundi ordinis respective; sed coni EBF, EOF, qui habent pro basi eundem circulum radii NE, sunt ut altitudines NB, NO; ergo etiam conus EOF non differt a parte sexquialtera coni EBF nisi quantitate infinitesima secundi ordinis respecti-

respective; sed coni E O F, E B F sunt infinitesimi quarti ordinis (1); nam bases, & altitudines horum conorum sunt infinitesimae secundi ordinis; ergo differentia coni E O F a parte sexquialtera coni E B F est infinitesima sexti ordinis. *Q. E. D.*

(1) *per prop. 3. lib. 1.*

COROLLARIUM.

Hinc ratio segmenti sphaerici E B F ad conum, cujus basis est circulus radii E N, altitudo vero intercepta N B, non differt a ratione, quae intercedit inter tria, & duo.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 16. SIt A B arcus circuli infinitesimus primi ordinis, A C sit sinus rectus, A B sit chorda, F B sit sinus totus, M B sit tangens, F A M sit secans ejusdem arcus; tum semicirculus B A L concipiatur rotari circa diametrum B F L; dico circulum genitum a tangente M B, seg-

ſegmentum ſuperficiei ſphaericae genitum ab arcu A B, & circulum genitum a ſinu recto A C differre inter ſe quantitate infiniteſima quarti ordinis; dico ſecundo conum genitum a triangulo rectangulo M B F, ſectorem ſphaericum A F D B, & conum genitum a triangulo rectangulo A F C differre inter ſe quantitate infiniteſima quarti ordinis.

Demonſt. prima pars. Circulus, cujus radius eſt tangens M B, ſegmentum ſuperficiei ſphaericae A B D, ſeu circulus, cujus radius eſt chorda A B per theoremata Archimedis, & circulus, cujus radius eſt ſinus rectus A C ſunt, ut quadrata tangentis M B, chordae A B, & ſinus recti A C; ſed tangens M B, chorda A B, ſinus rectus A C differunt quantitate infiniteſima tertii ordinis (1), hoc eſt, ſecundi ordinis reſpective ad ipſas, cum ſint infiniteſimae primi ordinis (2). Ergo etiam quadrata M B, A B, A C differunt quantitate infiniteſima ſecundi ordinis reſpective (3), ac proinde etiam circuli, quorum radii ſunt tangens M B, chorda A B, & ſinus

(1) *per prop.* 3.

(2) *per* 1. *prop.*

(3) *per prop.*20. *lib.* 1.

(1) corol. 1. prop. 20. lib. 1.

(2) per 1. part. hujus.

ſinus rectus A C, differunt quantitate infiniteſima ſecundi ordinis reſpective (1); ſed iſti circuli ex eo quia habent radium infiniteſimum primi ordinis ſunt infiniteſimi ſecundi ordinis. Ergo eorum differentia erit quarti ordinis. *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. Conus genitus a triangulo rectangulo M F B eſt ad ſectorem ſphaericum F A B D, ut circulus, cujus radius eſt tangens B M, eſt ad circulum, cujus radius eſt chorda B A; ſed iſti circuli differunt quantitate infiniteſima quarti ordinis (2), hoc eſt, ſecundi ordinis reſpective; ergo etiam conus M F N, & ſector ſphaericus A F D differunt quantitate infiniteſima ſecundi ordinis reſpective; ſed conus M F N, & ſector ſphaericus A F D ſunt infiniteſimi ſecundi ordinis. Ergo eorum differentia erit quarti ordinis. Quod differentia inter ſectorem ſphaericum A B D F, & conum genitum a triangulo rectangulo A C F ſit infiniteſima quarti ordinis patet ex praecedenti propoſitione. *Q. E. S.*

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Positis, quae ſupra poſuimus propoſitione praecedenti, dico differentiam circuli, cujus radius eſt ſinus rectus M B, a circulo, cujus radius eſt chorda M A, non differre a quarta parte differentiae ejuſdem circuli ſinus recti M B a circulo, cujus radius eſt tangens O A. Fig. 17.

Demonſt. Ex puncto M ducatur M S parallela ad C A; erit S O differentia ſinus recti M B a tangente A O; tum centro A, intervallo chorda A M abſcindatur ex tangente A O pars A X aequalis chordae A M; erit S X differentia ſinus recti M B a chorda M A. Circulus, cujus radius eſt chorda M A, ſeu A X, eſt ad circulum, cujus radius eſt ſinus rectus M B, ut quadratum X A eſt ad quadratum M B; ergo dividendo, differentia circuli radii X A a circulo ſinus recti M B eſt ad eundem circulum ſinus recti M B, ut biſrectangulum X S in S A cum quadrato X S eſt ad quadratum M B: ſimiliter circulus ſinus

recti M B est ad circulum tangentis O A, ut quadratum M B ad quadratum O A; ac proinde circulus sinus recti M B est ad differentiam ejusdem circuli M B a circulo tangentis O A, ut quadratum M B est ad bisrectangulum A S in S O cum quadrato S O. Ergo ex aequo differentia circuli sinus recti M B a circulo chordae A M est ad differentiam circuli ejusdem sinus recti M B a circulo tangentis O A, ut bisrectangulum A S in S X cum quadrato S X est ad bisrectangulum A S in S O cum quadrato S O, seu ut rectangulum A S in S X est ad rectangulum A S in S O; nam X S, & S O sunt infinitesimae respectu S A (1). Ergo praedictae differentiae sunt ut X S, & S O; sed X S non differt a quarta parte rectae S O (2). Ergo differentia circuli sinus recti M B a circulo chordae M A est ad differentiam ejusdem circuli sinus recti M B a circulo tangentis O A, ut unum ad quatuor, spretis tamen quantitatibus infinitesimis respectivis. *Q. E. D.*

(1) *per* 3. *prop.*

(2) *per* 5. *prop.*

CO-

COROLLARIUM.

Differentia igitur circuli ſinus recti M B a circulo chordae M A, ſeu a ſuperficie ſegmenti ſphaerici M A N non differt a tertia parte differentiae ſegmenti ſuperficiei ſphaericae M A N a circulo tangentis O A.

PROPOSITIO XV.

Iisdem poſitis, differentia ſuperficiei ſphaericae M A N a circulo ſinus recti M B non differt a duplo differentiae ejuſdem circuli ſinus recti M B a ſuperficie coni geniti a triangulo rectangulo M B A, excluſa baſi. Fig. 18.

Demonſt. Centro M, intervallo ſinu recto M B abſcindatur a chorda M A pars M T aequalis M B; tum inter A M, T M inveniatur media proportionalis M I. Superficies ſegmenti ſphaerici aequatur circulo, cujus radius eſt chorda M A; ſuperficies coni M A N, excluſa baſi, aequatur circulo, cujus radius eſt

M I media proportionalis inter chordam M A, & sinum rectum M B, per theoremata Archimedis. Ergo superficies segmenti sphaerici M A N est ad circulum sinus recti M B, ut quadratum M A est ad quadratum M B; ac proinde dividendo, differentia superficiei sphaericae M A N a circulo M B est ad circulum M B, ut bisrectangulum M T in T A cum quadrato T A est ad quadratum M B. Similiter circulus M B est ad superficiem coni M A N, exclusa basi, ut quadratum M B est ad quadratum M I; ac proinde circulus M B est ad differentiam ejusdem circuli M B a circulo M I, ut quadratum M B est ad bisrectangulum M T in T I cum quadrato T I; adeoque ex aequo praedictae differentiae sunt, ut rectangula M T A, M T I, seu, ut T A, T I; sed T A non differt a dupla T I (1). Ergo differentia superficiei sphaericae M A N a circulo sinus recti M B non differt a duplo differentiae superficiei coni M A N, exclusa basi, ab eodem circulo sinus recti M B. *Q. E. D.*

(1) *per coroll.* 1. *prop.* 2. *lib.* 1.

COROL-

COROLLARIUM.

Si igitur differentia circuli ſinus recti M B a ſuperficie coni M A N, excluſa baſi, ſit *unum*, erit differentia ejuſdem circuli M B a ſuperficie ſphaerica M A N *duo*, differentia ſuperficiei ſphericae M A N a circulo tangentis erit *ſex* (1), tandem differentia circuli ſinus recti M B a circulo tangentis erit *octo* (2).

(1) *per coroll. prop.* 14.
(2) *per* 14 *prop.*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19.

IIſdem poſitis, differentia coni O C P, geniti a triangulo rectangulo C A O, a ſectore ſphaerico M C N non differt a differentia ejuſdem ſectoris ſphaerici M C N a cono M C N, genito a triangulo rectangulo M C B.

Demonſt. Sector ſphaericus M C N aequatur cono, cujus altitudo eſt radius C A, baſis vero eſt circulus chordae M A. Cum igitur conus O C P, ſector ſphaericus M C N, ſeu conus altitudinis C A, baſis circuli M A, & ſoli-

dum

dum conflatum ex duobus conis M C N, M A N habeant eandem altitudinem C A, sunt, ut circuli tangentis O A, chordae M A, & sinus recti M B; ac proinde differentiae illorum conorum sunt, ut differentiae istorum circulorum; sed differentia circuli tangentis O A a circulo chordae M A non differt a triplo differentiae circuli chordae M A a circulo sinus recti M B (1). Ergo differentia coni O C P a sectore sphaerico M C N non differt a triplo differentiae ejusdem sectoris sphaerici M C N a solido conflato a duobus conis M C N, M A N; sed hoc solidum differt a cono M C N per conum M A N, & sector sphaericus M C N differt a cono M C N per segmentum sphaericum M A N; hinc cum segmentum sphaericum M A N sit ad conum M A N, ut tria ad duo (2), erit differentia sectoris sphaerici M C N a cono M C N ad differentiam ejusdem sectoris sphaerici M C N a solido conflato a duobus conis M C N, M A N, ut tria ad unum, spretis infinitesimis. Ergo differentia co-

ni

(1) *per coroll. prop.* 14.

(2) *per coroll. prop.* 12.

ni O C P a ſectore ſphaerico M C N, & differentia ejuſdem ſectoris ſphaerici M C N a cono M C N habent ad eandem quantitatem eandem rationem, ſpretis infiniteſimis; adeoque earum ratio non differt a ratione aequalitatis. *Q. E. D.*

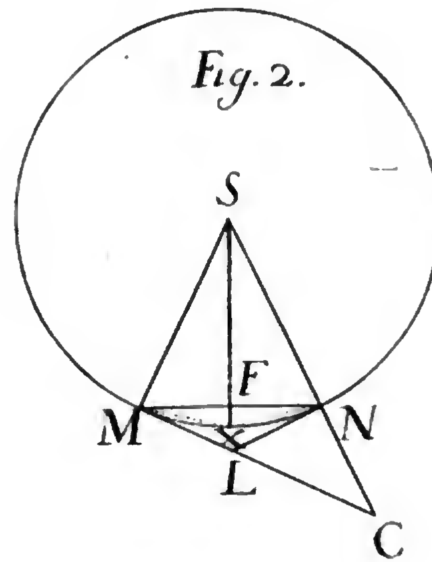
COROLLARIUM.

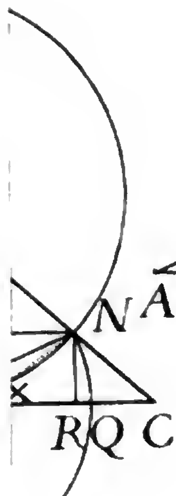
Si conus M A N ſit *duo*, erit ſegmentum ſphaericum M A N *tria* (1), & per hanc propoſitionem conus truncatus O M N P, ſeu differentia conorum M C N, O C P erit *ſex;* hoc eſt, conus M A N, ſegmentum ſphaericum M A N, & conus truncatus O M N P erunt in proportione harmonica.

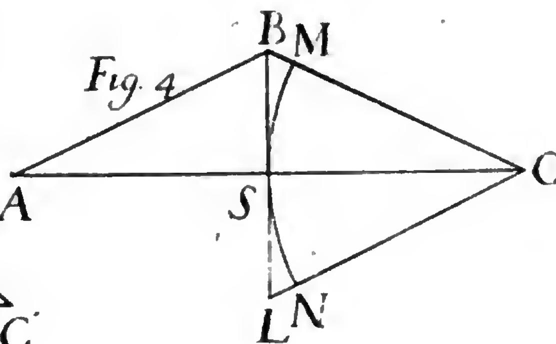
(1) *per coroll. prop.* 12.

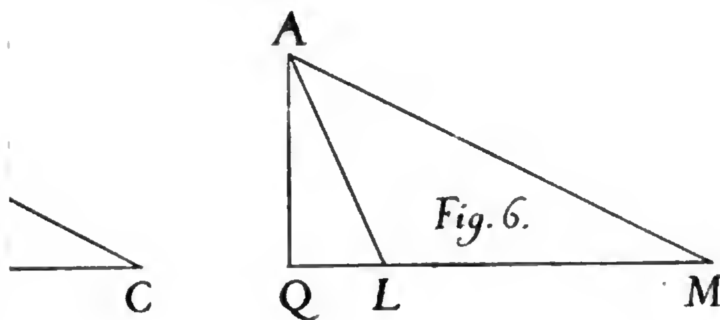
ELEMEN-

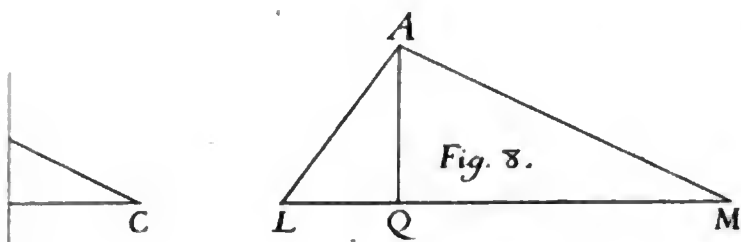

M
S

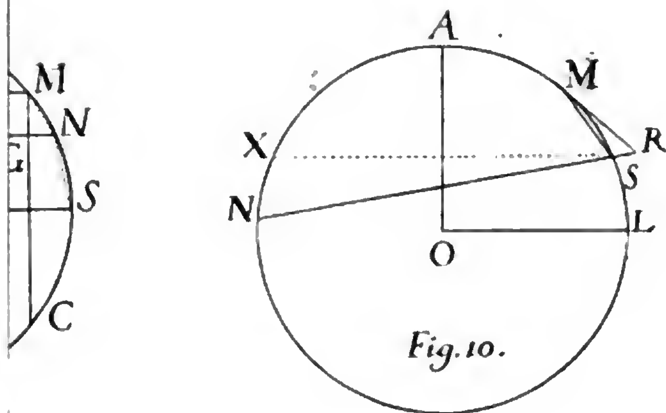

Fig. 2.
S
F
M
N
L
C

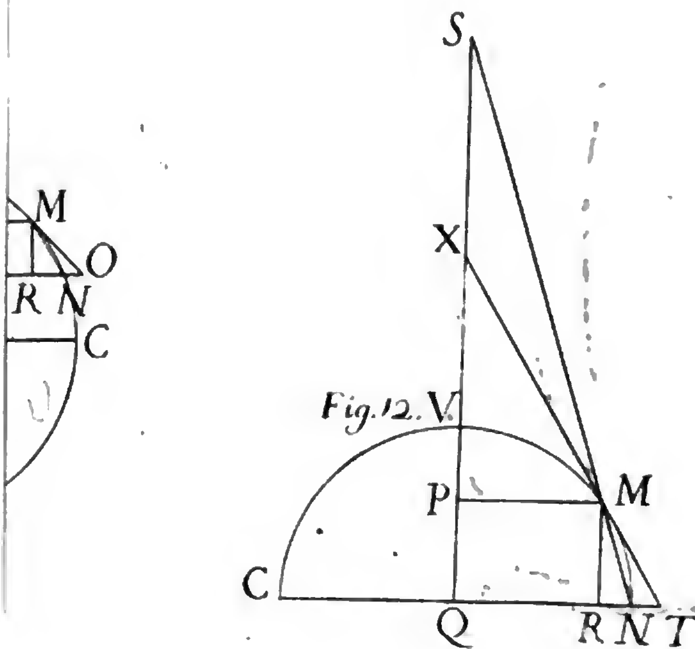

N
R
Q
C

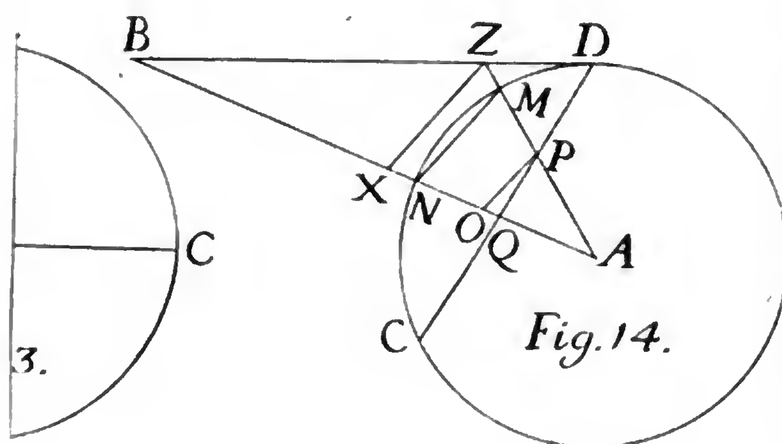

B
M
Fig. 4
A
S
C
L
N

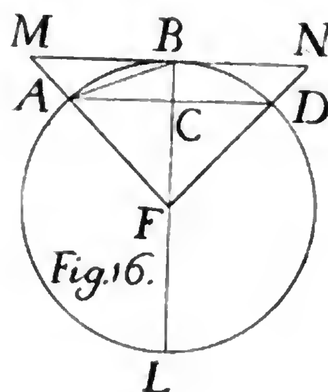

C
A
Fig. 6.
Q
L
M

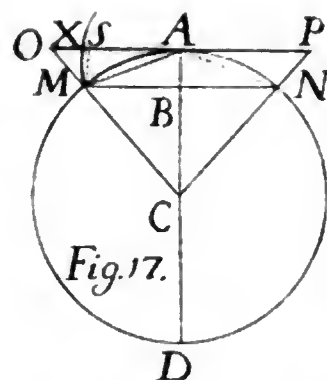

A
Fig. 8.
C
L
Q
M

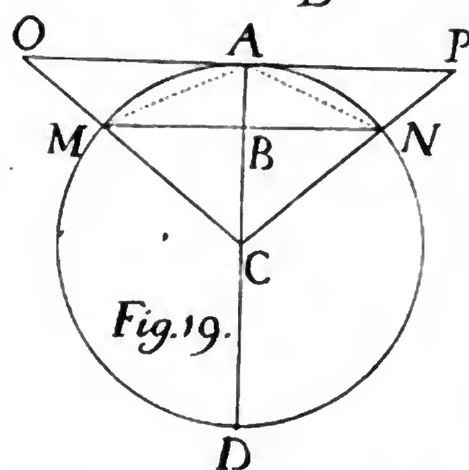

A
M
N
S
C
M
X
R
S
N
L
O
Fig. 10.


S
M
O
R
N
C
X
Fig. 12. V
P
M
C
Q
R
N
T


B
Z
D
M
P
X
N
O
Q
A
C
C
3.
Fig. 14.

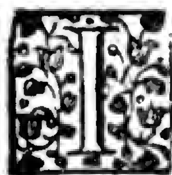

M
B
N
A
C
D
F
Fig. 16.
L


O
X
S
A
P
M
N
B
C
Fig. 17.
D


O
A
P
M
B
N
C
Fig. 19.
D

ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
LIBER TERTIUS.

PROPOSITIO I.

N curva quacunque A B C D E, sumptis arcubus A B, B C, C D, D E infinitesimis cujuscunque ordinis, ductisque subtensis A B, B C, C D, D E; dico angulos A B C, B C D, C D E factos a singulis binis subtensis infinitesimam habere differentiam a summa duorum rectorum, exceptis nonnullis punctis numero finitis. Fig. 1.

Demonst. Ducatur chorda A E, quae subtendat arcum A B C D E finitum, distinctum in arcus A B, B C, C D, D E infinitesimos, qui certe erunt numero infiniti; ac proinde cum subtensa A E terminabunt polygonum infinitorum laterum, cujus anguli externi omnes erunt numero infiniti; sed anguli externi cujuscunque polygoni simul sumpti aequant quatuor rectos. Ergo summa horum infinitorum angulorum non potest esse major quatuor rectis, quod fal-

sum esset, si anguli A B C, B C D &c. in punctis numero infinitis respective differrent a duobus rectis quantitate finita; nam infiniti anguli finiti dant summam angulorum infinitam. Ergo patet propositio.

COROLLARIUM.

Ex hac propositione patet semper stare conceptum curvae, dummodo anguli A B C, B C D &c. differant a duobus rectis quantitate infinitesima, etiam cujuscunque ordinis; neque requiritur, ut istae differentiae sint aequales, vel saltem differant quantitate infinitesima respective; sed possunt esse inaequales, quinimmo & infinitesimae diversorum ordinum; etenim in hisce casibus nunquam destruitur conceptus polygoni infinitorum laterum, ac proinde conceptus curvae.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI per puncta B, & C arcus B C infinitesimi cujuscunque ordinis ducantur tangentes M B N, O C R; dico angulos S B C, S C B factos a tangentibus cum chorda B C esse infinitesimos. Fig. 2.

Demonst. Sumantur arcus A B, C D infinitesimi, ducanturque subtensae A B, C D productae versus F; & chorda B C hinc inde producatur utcunque in E, & P. Per suppositionem subtensae A B, B C erunt infra tangentem M B N; ergo partes B F, B E erunt supra ipsam tangentem; adeoque tangens M B N cadit intra angulos E B A, F B C; sed isti anguli sunt infinitesimi (1); ergo multo magis anguli M B A, C B N sunt infinitesimi: idem demonstratur de angulo B C S. Ergo patet, &c. *Q. E. D.*

(1) *per* 1. *prop.*

COROLLARIUM.

Cum haec propositio dependeat ex antecedenti, hinc non verificatur in pun-

punctis, in quibus non verificatur illa.

SCHOLION.

Quando demonstrantur proprietates curvarum per angulos infinitesimos tangentium, & chordarum infinitesimarum, semper excluduntur puncta, in quibus praedictae propositiones non verificantur; sicuti etiam excluduntur puncta regressus, & flexus contrarii, nisi oppositum moneatur; quibus punctis quid eveniat curvae suo loco determinabimus.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. IN curva quacunque arcus B C infinitesimus non differt a corda B C, nisi infinitesima quantitate ordinis superioris.

Demonst. Per puncta B, & C ducantur tangentes B L, C L concurrentes in L, ex puncto L ducatur normalis L Q ad chordam B C. Quoniam anguli

li L B Q, L C Q sunt infinitesimi (1), erit normalis L Q infinitesima respectu ad latera B L, B Q, & C L, C Q (2); sed differentia laterum B L, B Q, & C L, C Q est infinitesima respectu ad L Q; ergo B L ⊹ L C, ac proinde arcus B C non differt a chorda B C nisi infinitesima quantitate ordinis superioris. *Q. E. D.*

(1) *per* 2. *prop.*

(2) *per* 9. *prop. lib.* I.

PROPOSITIO IV.

Fig. 4.

Recta A F subtendat arcum A B C D E F cujuscunque curvae; ex punctis A, & F ducantur tangentes A M, F N; dico summam angulorum M A F, A F N aequalem esse omnibus angulis factis ab omnibus tangentibus cum laterculis evanescentibus arcus A B C D E F.

Demonst. Arcus A C F dividatur in arcus infinitesimos A B, B C, C D, D E, E F; arcubus ducantur subtensae A B, B C, &c.; istae cum chorda A F terminabunt polygonum infinitorum late-

te-

terum, cujus anguli externi S A B, O B C, A F R &c. sunt aequales quatuor rectis; sed anguli S A B, R F A cum angulis B A F, A F E sunt aequales quatuor rectis; ergo, ablatis communiter angulis S A B, R F A, erunt omnes anguli infinitesimi O B C &c. aequales angulis B A F, A F E; sed anguli B A F, A F E, evanescentibus arcubus A B, B C &c., tandem coincidunt cum angulis tangentium M A F, A F N; & anguli infinitesimi C B O &c. tandem coincidunt cum angulis factis a tangentibus cum laterculis evanescentibus curvae; ergo etiam anguli M A F, A F N sunt aequales omnibus angulis factis ab omnibus tangentibus cum laterculis evanescentibus arcus A C F. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc si anguli O B C &c. sunt infinitesimi primi ordinis, & latera A B, B C sint quoque infinitesima primi respectu A F, erit summa angulorum M A F, A F N

A F N finita, cum resultet ex infinitis angulis O B C infinitesimis primi ordinis; si vero anguli O B C sunt infinitesimi secundi ordinis, erit summa angulorum M A F, A F N infinitesima primi. Idem dicito si anguli O B C sint infinitesimi ordinis superioris.

SCHOLION.

Si anguli O B C &c. non essent jugiter ejusdem ordinis, sed continue ordinum superiorum, tunc summa angulorum M A F, A F N esset ejusdem ordinis, ac est angulus O B C ordinis inferioris.

PROPOSITIO V.

IN curva B O X C, sumptis arcubus O D, D E, E F, F B &c. infinitesimis alicujus ordinis, sed respective ejusdem, anguli externi O D A, D E M &c., facti a chordis D E, E F &c. productis, sint infinitesimi ejusdem ordinis Fig. 5.

respectivé; si sumantur arcus BO, OX, XC alterius ordinis inferioris, sed respective ejusdem; dico angulos externos SOX, TXC &c., factos a chordis BO, OX &c. productis, esse ejusdem ordinis respective.

Demonst. Ducantur rectae OD, OE, OF, &c., & per punctum O ducatur tangens ZOY. Quoniam arcus OD, DE sunt infinitesimi ejusdem ordinis per suppositionem, erunt rectae OD, DE infinitesimae ejusdem ordinis (1); ac proinde in triangulo obtusangulo ODE anguli DOE, DEO sunt infinitesimi ejusdem ordinis, ac est angulus ADO; ac proinde ejusdem ordinis, ac est angulus MED, vel ejusdem ordinis, ac est angulus MEO. Similiter quoniam arcus OD, DE sunt infinitesimi ejusdem ordinis, ac est arcus EF, erit arcus OE infinitesimus ejusdem ordinis, ac est arcus EF; hinc subtensae OE, EF sunt infinitesimae ejusdem ordinis (2). Ergo in triangulo obtusangulo OEF angulus FOE est infinitesimus ejusdem ordinis, ac est angulus

(1) *per 3. prop.*

(2) *per 3. prop.*

lus

lus M E O, ſeu infiniteſimus ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E. Idipſum demonſtratur de aliis angulis B O F in infinitum, uſquedum arcus O B, ſeu chorda O B ſit alterius ordinis inferioris. Ergo angulus D O B, ac proinde angulus B O Y, ſeu S O Z componitur ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O B; eodem modo demonſtratur angulum Z O X componi ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E. Ergo integer angulus S O X componitur ex infinitis angulis ejuſdem ordinis anguli D O E. Idem demonſtratur de angulo T X C &c. Ergo anguli S O X, T X C &c. ſunt ejuſdem ordinis reſpective, cum ſint eadem ratione infiniti reſpectu ad angulum D O E. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Ex demonſtratione propoſitionis colligitur angulos D O Y, B O Y factos a tangente O Y cum chordis O D, O B diverſorum ordinum, eſſe & ipſos ordi-

num diverſorum, & quidem angulum chordae ordinis ſuperioris eſſe & ipſum ordinis ſuperioris reſpectu ad angulum chordae ordinis inferioris.

COROLLARIUM II.

Colligitur etiam angulos B O Y, Y O R, ſeu Z O X, factos a chordis B O, X O ejuſdem ordinis cum tangente Z O Y, eſſe ejuſdem ordinis.

COROLLARIUM III.

Ex puncto B ducta tangente B N erunt anguli Y O B, O B N ejuſdem ordinis; nam ſicuti demonſtratum eſt angulum Y O B componi ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E, ita demonſtrari poteſt etiam angulum O B N componi ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E.

COROLLARIUM IV.

Si anguli A D O, M E D &c. ſint infiniteſimi ejuſdem ordinis, ac ſunt arcus O D, D E, E F &c. quando anguli Y O B, O B N ſunt finiti, erit chorda O B pariter finita; ſi vero anguli A D O, M E D &c. ſint infiniteſimi ordinis inferioris reſpectu ad ordinem arcuum O D, D E &c. quando anguli Y O B, O B N ſunt finiti, chorda O B eſt infiniteſima; ac proinde curva deberet in ſe redire antequam chorda O B eſſet finita. Si tandem anguli A D O, M E D &c. ſint infiniteſimi ordinis ſuperioris reſpectu ad ordinem arcuum O D, D E &c. quando anguli A D O, M E D &c. ſunt finiti, chorda O B eſſet infinita; hinc curva non poſſet in ſe redire priuſquam chorda O B eſſet infinita.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Fig. 6.

IN curva praecedentis propoſitionis, maxima altitudo M R arcus A R F reſpectu ad chordam A F eſt ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A F, A F Z, facti a tangentibus X A, Z F cum chorda A F.

Demonſt. Maxima altitudo R M arcus A R M eſt ubi tangens X R Z eſt parallela chordae A F, alioquin arcus A R M non eſſet totus infra tangentem; hinc anguli M A R, M F R (ductis A R, R F) ſunt aequales angulis X R A, F R Z; adeoque ſunt ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A R, R F Z (1), ſeu ejuſdem ordinis ac ſunt anguli X A F, A F Z; ſed R M reſpectu A M, & M F eſt infiniteſima ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli R A M, R F M (2), ſeu ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A F, A F Z; hinc, cum anguli X A F, A F Z ſint ejuſdem ordinis, erit M R reſpectu ad totam A F ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A F, A F Z. *Q. E. D.*

(1) *per coroll. 3. prop. 5.*

(2) *per 9. prop. lib. 1.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

Rectae A B, B C ad quemcunque angulum finitum A B C positae sint diametri coordinatarum; ducanturque ordinatae Q N, P M intercipientes arcum M N infinitesimum primi ordinis, cujus chorda sit M N, & ducatur N R parallela ad A B; dico latera trianguli M R N esse infinitesima primi ordinis, excepto, quando chorda M N producta faciens angulum infinitesimum accedit ad parallelismum cum diametris coordinatarum. Fig. 7. & 8.

Demonst. Chorda M N producatur usquedum concurrat cum diametris coordinatarum in punctis X, & Z; cum haec non faciat angulos infinitesimos cum diametris X B, B Z, erunt anguli B X Z, X Z B finiti; adeoque in triangulo X B Z, & ob parallelismum rectarum N R, X B, & R M, B Z in triangulo etiam R M N, anguli omnes sunt finiti; ac proinde latera N M, M R, N R sunt ejusdem ordinis; sed N M ex hypothesi est infinitesima primi ordinis, quia arcus N M est infinitesimus

pri-

primi ordinis. Ergo N R, R M sunt infinitesimae primi ordinis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Si arcus N M interceptus ab ordinatis Q N, P M sit infinitesimus ordinis superioris, erit etiam N R, & M R infinitesima ejusdem ordinis superioris.

COROLLARIUM II.

Si per punctum N ducatur tangens N S, efformatum erit triangulum M N S, in quo anguli N S M, N M S sunt finiti per suppositionem; angulus vero S N M est infinitesimus per naturam curvae; ~~ergo S M~~ est infinitesima respectu N M, ac proinde respectu R M; hinc M S respectu R M erit spernenda.

SCHOLION.

In punctis, in quibus M N est parallela diametris coordinatarum, observanda

ve-

veniunt, quae diximus in scholio propositionis IX. libri secundi.

PROPOSITIO VIII.

IN diametro A B curvae A M N C sumantur P Q, Q B quantitates infinitesimae primi ordinis, quae non differant, nisi quantitate infinitesima respective; ex punctis P, Q, B ducantur ordinatae P M, Q N, B C ad angulum finitum cum diametro A B, tum chordae M N, N C, tandem ex punctis M, & N ducantur M R, N X parallelae ad A B; oportet determinare differentiam, quae intercedit inter latera homologa triangulorum M R N, N X C. Fig. 9., & 10.

Con. Chorda M N producatur usquedum concurrat cum ordinata B C producta, si opus est, in S. Quoniam triangula M R N, N S X sunt aequiangula, ac proinde similia ob parallelismum rectarum R N, X S, & M R, N X; hinc, si duo latera homologa M R, N X, vel R N, X S, vel N M, N S

ſupponantur conſtantia, ſeu aequalia, omnia latera trianguli N M R ſunt aequalia lateribus correſpondentibus trianguli S N X; ſi vero duo latera homologa differant quantitate infiniteſima alicujus ordinis, etiam reliqua latera homologa triangulorum M N R, N S X differunt quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis; ſed latera trianguli N C X non differunt a lateribus trianguli N S X, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis, poſito angulo C N S infiniteſimo primi ordinis (1). Ergo latera trianguli M N R non differunt a lateribus trianguli N C X, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis. *Q. E. I.*

(1) *per prop.* 9. 10. 11. *lib.* 1.

COROLLARIUM I.

Poſito angulo C N S infiniteſimo ordinis ſuperioris, etiam differentia inter latera trianguli N C X, & N S X erit & ipſa infiniteſima ordinis ſuperioris; hinc, ſi latera trianguli M R N, & N X S ſunt relative aequalia, erit differentia inter latera triangulorum M R N, N C X eadem,

eadem, ac illa, quae intercedit inter latera triangulorum N S X, N C X; si vero latera triangulorum M R N, N X S differunt quantitate infinitesima alicujus ordinis, tunc differentia, quae intercedit inter latera triangulorum M R N, N X C dependet ex combinatione harum quantitatum infinitesimarum cum quantitatibus infinitesimis, quibus differunt latera triangulorum N S X, N C X.

COROLLARIUM II.

Patet etiam via, qua determinari possunt differentiae inter latera homologa triangulorum M N R, N C X, etiamsi latera horum triangulorum sint infinitesima cujuscunque ordinis, & differentia, quae intercedit inter latera homologa triangulorum M R N, N X S sit similiter infinitesima cujuscunque ordinis respective ad ipsa latera, & angulus C N S sit pariter infinitesimus cujuscunque ordinis.

SCHOLION.

In qualibet curva licitum eſt accipere fluxionem, aut abſciſſarum, aut ordinatarum aut curvae, aut aliam tanquam conſtantem pro determinandis quantitatibus infiniteſimis ordinum ſuperiorum relative ad conſtantes; ſed ſtatim ac una tanquam conſtans ſumpta eſt, liberum amplius non eſt aliam accipere, alioquin determinaretur curva.

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. & 12. EX puncto A ad quamcunque curvam P Q B ducantur rectae A Q, A B intercipientes arcum Q B infiniteſimum primi ordinis, cui ſubtendatur Q B, & ex puncto Q in A B demittatur normalis Q R; dico tria latera trianguli Q R B eſſe infiniteſima primi ordinis, exceptis illis punctis, in quibus Q B vel eſt normalis ad A B, vel in directum cum A Q, vel ſaltem a vera normali, & a vera directione cum A Q differt quantitate infiniteſima.

De-

Demonst. patet; nam per suppositionem angulus R B Q neque est rectus, neque infinitesimus; igitur cum angulus B R Q sit rectus, in triangulo R B Q tres anguli sunt finiti, ac proinde tria latera infinitesima primi ordinis, cum B Q sit infinitesimum primi ordinis per suppositionem. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Si arcus Q B sit infinitesimus ordinis superioris, erunt etiam latera Q R, R B infinitesima ejusdem ordinis superioris.

COROLLARIUM II.

Si ex puncto Q ducatur tangens Q S, quae concurrat cum R B producta, si opus est, in S, cum anguli Q B S, Q S B sint finiti per suppositionem, & angulus B Q S sit infinitesimus per naturam curvae, erit B S intercepta inter tangentem, & curvam infinitesima respectu B Q, ac proinde respectu R B; adeoque B S respectu R B erit spernenda.

SCHO-

SCHOLION.

Quod dictum est aliquam alterationem patitur, ubi chorda B Q vel est normalis ad A B, vel in directum cum A Q; & generaliter loquendo, quando anguli fluentes vel evadunt recti, vel aequales duobus rectis, vel saltem differentia horum angulorum aut a recto, aut a duobus rectis transit ex uno ordine ad alium, tunc nonnulli anguli fluentes, ac proinde nonnullae rectae fluentes, transeunt ex uno ordine ad alium; & sic tota congeries quantitatum fluentium alterationem patitur, quae tamen non erit difficile determinatu ab illis, qui nostris elementis instructi sunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 13., & 14. EX puncto A ad quamcunque curvam ducantur tres rectae A P, A Q, A B, intercipientes arcus B Q, Q P infinitesimos primi ordinis, qui non differant, nisi quantitate infinitesima respecti-

ctive, tum ex punctis P, Q ducantur normales P M, Q R ad rectas A Q, A B; oportet determinare differentiam, quae intercedit inter latera homologa triangulorum P M Q, Q R B.

Con. Rectae A P, A Q, A B sint finitae, & chordae B Q, Q P non jaceant in directum cum rectis A B, A Q, A P; chorda P Q producatur usquedum concurrat cum A B producta, si opus est, in S. Cum arcus P Q, Q B sint infinitesimi primi ordinis, erunt etiam chordae P Q, Q B infinitesimae primi ordinis (1); ac proinde in triangulis P A Q, Q A B, cum anguli A P Q, A Q P, & A Q B, A B Q sint finiti, & latera P Q, Q B sint infinitesima primi ordinis, erunt anguli P A Q, Q A B infinitesimi primi ordinis (2); hinc in triangulo M Q P angulus M Q P auctus est quantitate infinitesima primi ordinis respectu ad angulum R S Q trianguli R Q S; ergo, posito latere uno homologo constante, erit differentia reliquorum laterum infinitesima primi ordinis respective (3), hoc est, secundi ordinis;

(1) *per* 3. *prop.*

(2) *per prop.* 9. 10. 11. *lib.* 1.

(3) *per prop.* 17. *lib.* 1.

dinis ; ſed latera trianguli R Q B non differunt a lateribus trianguli R Q S, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis (1). Ergo latera trianguli M P Q non differunt a lateribus homologis trianguli R Q B, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis.

(1) per prop. 11. lib. 1.

Si vero nullum latus ſit conſtans, ſed unum R Q, ex. gr., trianguli R Q S, differat a latere homologo M P trianguli M P Q quantitate infiniteſima ordinis ſuperioris ; tum abſcindatur Q X, ex. gr., aequalis P M, & per A, & X ducatur A X, quae concurrat cum Q S in Z. Quoniam X Z eſt infiniteſima reſpectu A X, & angulus X A B infiniteſimus, erit X Z parallela ad R S (2). Igitur cum R X ſit infiniteſima ordinis ſuperioris, hinc differentia inter latera homologa triangulorum X Q Z, R Q S erit infiniteſima ordinis ſuperioris (3) ; ſed latera trianguli X Q Z non differunt a lateribus trianguli M P Q, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis (4). Ergo latera trianguli R Q S, ac proinde latera trianguli R Q B, non differunt

(2) per doctrinam parallelarum.

(3) per praecedentem part.

(4) per 1. part. hujus.

runt a lateribus trianguli M P Q, nisi quantitate infinitesima secundi ordinis. *Q. E. I.*

COROLLARIUM.

Patet via, qua determinari potest differentia inter latera homologa triangulorum M Q P, R Q B, etiamsi latera horum triangulorum sint infinitesima cujuscunque ordinis, & differentiae horum laterum sint similiter infinitesimae cujuscunque ordinis respective, & angulus S Q B sit infinitesimus cujuscunque ordinis.

SCHOLION I.

Si rectae A P, A Q, A B sint infinitesimae, vel jaceant in directum cum chordis P Q, Q B, tunc quae hactenus demonstravimus alterationem patiuntur.

SCHOLION II.

Fig. 15. Antequam ulterius progrediamur juvat animadvertere quantitates fluentes posse fluere ex omni parte, qua limite coercentur; unde sedulo perpendendum est, nisi in paralogismos incurrere velimus, ex quibusnam partibus data quantitas fluat: sic abscissae A P, A Q, & ordinatae P M, Q N ex una parte tantum fluunt; sed subtangens P V, ex. gr., non tantum fluit ex parte V, sed etiam ex parte P, itaut tota fluxio sit P Q + U R.

PROPOSITIO XI.

Fig. 16. IN curva quacunque, quando anguli M A B, A B N, facti a chorda A B cum tangentibus A M, B N, sunt aequales duobus rectis, tunc chorda A B est maxima ex parallelis.

Demonst. Per punctum quodlibet F sumptum in curva ducatur P Q parallela A B. Cum anguli M A B, A B N sint

ſint aequales duobus rectis, erit A P parallela ad B Q; ac proinde P Q aequalis erit A B; ſed puncta F, T interſectionis rectae P Q cum curva ſunt intra tangentes A M, B N. Ergo chorda F T non poteſt eſſe major recta P Q, ac proinde recta A B. Ergo A B eſt maxima chorda ex parallelis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Si ſumatur arcus A F infiniteſimus cujuſcunque ordinis, & per punctum F ducatur F R parallela tangentibus M A, B N, ductaque chorda A F, erit angulus A F R aequalis angulo M A F, ac proinde infiniteſimus. Igitur, poſitis angulis A B N, B A M, ſeu angulis A R F, R A F finitis, erit A R infiniteſima reſpectu R F.

PROPOSITIO XII.

Fig. 17. IN curva quacunque, si anguli R S T, S T Q, facti a chorda S T cum tangentibus R T, S Q, sint aequales quatuor rectis, erit chorda S T minima ex parallelis post maximam A F.

Demonst. Quoniam anguli R S T, S T Q sunt aequales quatuor rectis, tangentes R T, S Q unam rectam conficiunt cum chorda S T; ac proinde sunt & ipsae in directum, hinc curva ulterius non procedit. Intra chordam maximam A F, & chordam S T ducatur alia chorda M N parallela ad S T; & per puncta M, & N ducantur tangentes M L, N L secantes alias tangentes R T, S Q in punctis R, & Q, & concurrentes in L. Chorda M N est major recta R Q; sed puncta R, & Q esse debent extra curvam. Ergo recta R Q non potest esse minor recta S T; ac proinde chorda M N non erit minor chorda S T. Ergo chorda S T minima est ex parallelis post maximam. *Q. E. D.*

CO-

COROLLARIUM.

Si sumatur arcus M S infinitesimus, & per M ducatur chorda M N parallela chordae minimae S T; tum ex S demittatur normalis S G in chordam M N, erit angulus G M S aequalis angulo R S M, ac proinde infinitesimus. Igitur, cum anguli M S G, M G S sint finiti, erit G S infinitesima respectu M G (1).

(3) per prop. 9. lib. 1.

LEMMA.

Fig. 18.

SI per punctum A arcus A D B describatur alius arcus A S, itaut distantia D C singulorum punctorum arcus A D B a chorda A B differat respective quantitate infinitesima D S a distantia S C singulorum punctorum arcus A S a chorda A B; curvatura arcus A S accipi potest pro curvatura arcus A D B; minime vero si differentia D S non sit infinitesima respectu S C. Hoc per se clarum est.

SCHO-

SCHOLION.

Hoc cum respective tantum verum sit, hinc in nonnullis circumstantiis, ex. gr., quando considerantur quantitates ordinis rectae S D, vel ordinis superioris, licitum non erit accipere curvaturam arcus A D pro curvatura arcus A S.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 19. SIt M N arcus infinitesimus cujuscunque ordinis curvae N M T, in qua ducta chorda M N, & tangentibus N Q, M Q, sint anguli Q M N, M N Q infinitesimi ejusdem ordinis, ac est arcus M N, differentiae vero istorum angulorum sint infinitesimae cujuscunque ordinis incipiendo ab ordine proximo superiore praedictorum angulorum; si ex punctis M, & N ducantur ad tangentes M Q, N Q normales M C, N C concurrentes in C, tum centro C intervallo C N describatur arcus N O; dico curvaturam arcus M N non differre a curvatura arcus N O.

De-

Demonst. Ex puncto N ducatur sinus rectus N R in C M. In quadrilatero Q M C N, cum anguli Q M C, Q N C sint recti, erunt anguli M Q N, M C N aequales duobus rectis; ac proinde angulus M C N aequalis erit angulis Q M N, M N Q; adeoque angulus M C N est ejusdem ordinis, ac est arcus M N, seu chorda M N (1); sed anguli C N M, C M N sunt finiti, & acuti, cum singuli differant a recto quantitate infinitesima; hinc rectae C M, C N sunt finitae, & earum differentia M O est infinitesima (2). Praeterea ob angulos rectos C M Q, C N Q erunt quadrata C M, M Q aequalia quadratis C N, N Q; hinc cum C M ponatur major C N, erit Q N major M Q; ex recta Q N abscindatur Q S aequalis M Q, & ducatur M S, erunt anguli S M N, M N S aequales angulo M S Q, seu S M Q; hinc angulus N M S est semidifferentia angulorum Q M N, M N Q; adeoque angulus S M N erit infinitesimus respectu ad angulum M N S per suppositionem, & S N

(1) *per 3. prop.*

(2) *per prop. 10. lib. 1.*

& S N erit infinitesima respectu S M (1); ac proinde respectu S Q. Si igitur a quadratis C M, M Q ex una parte, & a quadratis C N, N Q ex altera, auferantur communiter quadrata M Q, C N, remanebit tandem rectangulum C O M aequale rectangulo Q S N, spretis differentiis infinitesimis respectivis. Ergo C O est ad Q S, ut S N est ad ad M O; sed Q S est infinitesima respectu C M & N S est infinitesima respectu S Q. Ergo M O est infinitesima ordinis superioris ordine duplo majore rectae Q S, seu M N, seu sinus recti N R; sed R O est infinitesima ordinis duplo majoris sinus recti N R (2). Ergo M O est infinitesima respectu O R.

(1) *per prop.* 14. *lib.* 1.

(2) *per prop.* 1. *lib.* 2.

Idipsum verificatur respectu ad alia puncta arcuum M N, O N; nam ducto quolibet radio C D Z, & ex N sinu recto N X, eodem modo demonstratur D Z esse infinitesimam respectu D X, & multo magis respectu D F. Si igitur ex Z ducatur normalis ad R N, erit Z E infinitesima respectu E L, ut colligitur ex notis circuli proprietatibus. Ergo

cur-

curvatura arcus M N non differt a curvatura arcus N O (1). *Q. E. D.*

(1) *per lemma.*

PROPOSITIO XIV.

Fig. 19.

IN curva T M N superioris propositionis, si sumantur duo arcus successivi M T, M N infinitesimi cujuscunque ordinis, sed ejusdem; & ex punctis T, M, N erigantur normales ad curvam T G, N C intersecantes normalem ad curvam M C; dico interceptam C G esse infinitesimam.

Demonst. Producatur T G usquedum concurrat cum N C in V. Differentia inter T V, V N erit ordinis superioris ordine duplo majore arcus T M N, seu anguli T V N; addita communiter C V, erit differentia inter T V + V C, & C N ordinis superioris ordine duplo majore arcus T M N, seu anguli T V N; sed C M non differt a C N, & G M a G T, nisi quantitate infinitesima ordinis superioris ordine duplo majore arcuum M N, M T. Ergo differentia in-

ter T V + V C, & C M, ſeu inter T V + V C, & T G + C G, ſeu inter G V + V C, & C G erit infiteſima ordinis ſuperioris ordine duplo majore arcus T M N, ſeu anguli T V N; ſed in triangulo G V C, ob angulos C G V, G C V infiniteſimos ejuſdem ordinis, differentia inter latera G V + V C, & baſim C G eſt infiniteſima reſpectu ad C G ordinis duplo majoris anguli G V N (1). Ergo eadem differentia reſpectu ad C M, ſeu ad quantitatem finitam eſt infiniteſima ordinis ſuperioris ordine duplo majori anguli T V N; reſpective vero ad C G eſt infiniteſima ordinis duplo majoris ordine ejuſdem anguli T V N. Ergo C G eſt infiniteſima. *Q. E. D.*

(1) *per prop.* 13. *lib.* 1.

COROLLARIUM I.

Idipſum cum demonſtretur de omnibus aliis ſucceſſivis interceptis C G eodem modo determinatis, hinc patet omnia puncta, in quibus ſeſe interſecant normales ad curvam infinite proximae,

eſſe

esse in alia curva, ex. gr., C G I, quae respectu ad curvam T M N illius *evoluta* dicitur; curva vero T M N *genita ex evoluta* C G I appellatur; nam si pedetentim solvatur filum circumplicatum circa evolutam I G C, punctum extremum I, ex. gr., describet curvam T M N; normales M G, N C &c. determinatae per intersectionem normalium infinite proximarum nuncupantur *radii osculatorii;* circulus vero singulis hisce radiis descriptus appellatur circulus osculi.

COROLLARIUM II.

Duae praecedentes propositiones verificantur etiamsi arcus M N sit infinitesimus ordinis superioris, vel inferioris relate ad angulos Q M N, M N Q, dummodo differentia horum angulorum sit respective infinitesima; nam angulus S M N est semper infinitesimus relate ad angulum Q M N, seu M N Q; adeoque S N est semper infinitesima respectu S Q, seu respectu M N, seu respectu N R. Igitur cum radius C O non

possit esse ordinis superioris sinus recti R N, sed ad summum ejusdem ordinis, quando scilicet anguli Q M N, M N Q sunt finiti; hinc M O est semper infinitesima respectu R O; nam M O est quarta proportionalis post C O, Q S, S N; & R O est tertia proportionalis post C O + C R, & R N. Similiter differentia inter G V + V C, & C G respectu ad C M est semper infinitesima ordinis superioris ordine duplo majore arcus T M N, seu anguli T V N; sed differentia inter G V + V C, & G C respectu C G est infinitesima ordinis duplo majoris anguli T V N. Ergo C G est semper infinitesima respectu C M.

SCHOLION.

In triangulo M C N, posita basi M N infinitesima ejusdem ordinis relate ad assignabilem, ac est angulus M C N, latera M C, C N sunt finita; nam ut ordo anguli M C N ad angulum finitum C N M, ita ordo rectae M N ad ordinem rectae C M; sed M N est ejusdem

dem ordinis relate ad finitum, ac eſt angulus M C N relate ad angulum finitum; ergo C M eſt finita. Si vero M N relate ad aſſignabilem eſt infiniteſima ordinis ſuperioris reſpectu ad ordine anguli M C N, tunc C M eſt infiniteſima. Si tandem M N eſt infiniteſima ordinis inferioris, tunc M N eſt infinita. Ergo curvatura arcus N O, ſeu N M in primo caſu aequalis eſt curvaturae circuli finiti, in ſecundo caſu eſt major, in ultimo vero eſt minor omni circulo finito.

PROPOSITIO XV.

SIt M N arcus infiniteſimus cujuſcunque ordinis curvae N M T, in qua, ducta chorda M N, & tangentibus M Q, Q N, ſint anguli Q M N, M N Q ſimul ſumpti ejuſdem ordinis, ac eſt arcus, ſed utcunque inaequales; ſi ex punctis M, & N ad tangentes M Q, Q N erigantur normales concurrentes in C, & centro C intervallo C N deſcribatur Fig. 19.

arcus

arcus N O; dico curvaturam arcus M N differre a curvatura arcus N O.

Demonſt. Ducantur rectae M S &c. ut in propoſitione decima tertia. Angulus S M N ſemidifferentia angulorum Q M N, M N Q vel eſt ejuſdem ordinis, ac eſt angulus M N Q, vel relate ad hunc eſt infinitus; ergo S N eſt ſemper ejuſdem ordinis rectae M N (1), ſeu ſinus recti N R. Cum igitur in hoc caſu ſit biſrectangulum C O in O M aequale biſrectangulo Q S in S N + quadrato S N; ergo M O eſt quarta proportionalis poſt bis ſinum totum C O, poſt bis Q S + S N, & poſt S N. Sed bis Q S + S N, & S N ſunt ejuſdem ordinis; hinc M O relate ad C O eſt ordinis ~~duplo majoris rectae~~ Q N, ſeu ſinus recti N R; ſed etiam R O relate ad C O eſt infiniteſima ordinis dupli majoris ſinus recti N R; ergo M O, & O R ſunt ejuſdem ordinis. Idipſum cum demonſtretur de aliis rectis infinitis Z E, & E L; ergo curvatura arcus M N differt a curvatura arcus N O (2). *Q. E. P.*

(1) *per prop.* 13. *&* 14. *lib.* 1.

(2) *per lemma.*

PRO-

PROPOSITIO XVI.

IN curva antecedentis propositionis, si sumantur duo arcus T M, M N infinitesimi cujuscunque ordinis, & ex punctis T, M, N ducantur normales ad curvam T V, M C, N C sese intersecantes in punctis G, V, C; dico interceptam C G, & rectam G M esse ejusdem ordinis. Fig. 19.

Demonst. Differentia inter T V, V N respectu C M est infinitesima ordinis duplo majoris anguli T V N (1); ergo argumentando, ut in propositione decima quarta, erit differentia inter G V + V C, & G C respectu C M ordinis duplo majoris anguli T V N; sed differentia inter G V + V C, & G C respectu ipsius C G est infinitesima ordinis duplo majoris anguli T V N; ergo eadem differentia est infinitesima ejusdem ordinis tum respectu C M, tum respectu G C; adeoque M C, G C sunt ejusdem ordinis. *Q. E. D.*

(1) *per praecedentem.*

CO-

COROLLARIUM.

Hinc patet curvas hujusmodi non habere radium osculatorium, neque circulum osculi, neque evolutam.

SCHOLION.

Methodi hactenus traditae pro determinandis evolutis curvarum, locum dumtaxat habere possunt in curvis propositionis decimae tertiae, in quibus anguli, facti a chorda infinitesima, & tangentibus ductis per estremitates istius chordae, non differunt, nisi infinitesima quantitate respective. Sed advertendum est plures curvas, sumptis arcubus infinitesimis ordinis superioris, habere praerequisitam conditionem, licet tali conditione non gaudeant, sumptis arcubus infinitesimis ordinis inferioris, ut colligitur ex corollario primae propositionis; adeoque pro determinandis evolutis harum curvarum confugiendum est ad arcus infinitesimos ordinis superioris.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SIt S C radius infinitus cujuſcunque ordinis circuli A C B, in quo ſumatur arcus A B infiniteſimus cujuſcunque ordinis, incipiendo a primo relate ad finitum; dico nullam dari parabolam primam C X ex infinitis ordinibus, habentem parametrum C Z finitam, cujus vertex habeat eandem curvaturam arcus A C B. Fig. 20.

Demonſt. Ex arcu C A ducatur quaelibet ordinata A M in communem axem C R, quae ſecet parabolam in X. Si curvatura arcus C X non differt a curvatura arcus A C, eſt A X infiniteſima reſpectu X M; adeoque rectangulum R M in M C multiplicatum in potentiam determinatam ordinatae A M non differt a rectangulo R M in M C multiplicato in potentiam eandem rectae X M (1); ſed potentia praedicta rectae X M multiplicata in rectangulum R M in M C, ſeu in quadratum M A, ſeu in quadratum M X aequatur determinatae poten-

(1) *per prop. 20. lib. 1.*

R tiae

tiae parametri Z C multiplicatae in C M. Ergo rectangulum R M in M C multiplicatum in potentiam A M aequatur determinatae potentiae parametri C Z multiplicatae in C M. Ergo R M multiplicata in potentiam rectae A M aequatur determinatae potentiae parametri C Z. Idipsum demonstratur de quavis alia recta R m multiplicata in eandem potentiam rectae a m; ergo R M multiplicata in potentiam rectae A M non differt, nisi infinitesima quantitate, a recta R m multiplicata in eandem potentiam rectae a m; sed R M, R m non differunt, nisi infinitesima quantitate M m. Ergo potentiae eaedem rectarum A M, a m non possunt differre, nisi infinitesima quantitate respective. Quod cum falsum sit, falsum etiam erit curvaturam arcus C X non differre a curvatura arcus C A. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

SI in puncto quolibet A occurrant duae curvae A B M, A C N, in quibus, sumptis circa idem punctum A arcubus infinitesimis A B, A C, ductisque chordis A B, A C, angulus B A C non sit infinitesimus, vel non differat a duobus rectis quantitate infinitesima; dico huic puncto duas competere tangentes; si vero angulus B A C sit infinitesimus, vel differat a duobus rectis quantitate infinitesima; dico huic puncto unam dumtaxat competere tangentem. Fig. 21. 22. 23. 24.

Demonst. prima pars. In puncto A ducantur tangentes S A T, s A t ad arcus A B M, A C N. Quoniam arcus B A, A C sunt infinitesimi, & punctum A est ab utroque exclusum, hinc anguli B A S, C A s sunt infinitesimi (1), qui si addantur angulo B A C in figura 21., vel deducantur ab angulo B A C in figura 22., vel eidem angulo B A C addatur unus B A S, deducatur alius C A s, in figura 23., &

(2) per prop. 2.

24., reſultabit angulus S A s interſe-ctionis tangentium S A T, s A t, qui neque erit infiniteſimus, neque differet a duobus rectis quantitate infiniteſima. Ergo tangentes S A T, s A t ſe interſecant ad angulos finitos; adeoque veluti unica tangens conſiderari non poſſunt. *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. Si angulus B A C vel eſt infiniteſimus, ut in figura 22., & 23., vel differt a duobus rectis quantitate infiniteſima, ut in figura 21., & 24., tunc etiam angulus S A s in figura 22., & 23. erit infiniteſimus; in figura vero 21., & 24. differt a duobus rectis quantitate infiniteſima; & per conſequens in hiſce figuris angulus S A t eſt infiniteſimus. Ergo tangentes S A T, s A t, ut unica tangens ſpectari poſſunt. *Q. E. S.*

COROLLARIUM.

Quod dictum eſt de duabus curvis circa punctum A exiſtentibus, idem dici poteſt de infinitis.

SCHO-

SCHOLION I.

Secunda pars propositionis falsa esse potest, si curvatura circa punctum A sit minor omni circulo finito; etenim fieri potest in hoc casu, ut angulus S A t in figura 21., & 24., vel S A s in figura 22. & 23. sit infinitesimus ordinis inferioris relate ad ordinem anguli B A S, facti a tangente A S cum chorda infinitesima B A; & tunc tangentes S A T, s A t, ut unica tangens considerari non possunt; quod certe animadversione dignum est.

SCHOLION II.

Quando circa punctum A sunt plures tangentes, tunc punctum illud appellatur *punctum intersectionis*; quando unica est tantum tangens, tunc punctum illud in figura 21. non habet nomen peculiare; in figura 22., & 23. dicitur punctum *regressus*; in figura 24. dicitur punctum *flexus contrarii*. Igitur in puncto flexus contrarii, quae est tangens ad u-

num arcum A B M, eſt etiam tangens ad alium A C M.

SCHOLION III.

Fig. 25., 26., 27., 28.

Si in aliquo puncto D alicujus curvae, pars X M ordinatae S M, intercepta inter curvam, & tangentem, evadat nihilo aequalis, aut infinita, hoc eſt, ſi intercepta X M evadat ordinis ſuperioris, vel inferioris relate ad ordinem ejuſdem interceptae in aliis punctis curvae, tunc communiter exiſtimatum eſt punctum illud aut eſſe punctum flexus contrarii, aut regreſſus; verum hoc generaliter loquendo falſum eſſe patet ex eo, quod in punctis etiam, in quibus tangens D M ſimpliciter parallela eſt, vel normalis diametro B A, intercepta X M evadit nulla, vel infinita, ſenſu jam explicato, abſque eo quod punctum D ſit punctum flexus contrarii, aut regreſſus. Igitur ex eo, quod pars ordinatae intercepta inter curvam, & tangentem ſit nihilo aequalis, aut infinita, nil aliud inferri poteſt, quam pun-

ctum

ctum D esse punctum peculiare curvae, in quo vel adest maximum aliquod, vel minimum, vel punctum flexus contrarii, vel regressus. Ut autem determinemus utrum in puncto D sit maximum aliquod, aut minimum, vel flexus contrarius, vel regressus, puto nullam aliam tutiorem viam nos ingredi posse, quam recurrendo ad puncta S, R infinite proxima puncto B, & hinc inde ab eodem puncto B accepta in linea abscissarum, & observando utrum hisce punctis conveniant ordinatae, si sint positivae, an negativae; utrum etiam interceptae inter curvam, & tangentem sint positivae, an negativae, licet sint cujuscunque ordinis infinitesimorum; nam ex horum combinatione facile eruitur quam mutationem subeat curva in puncto D. Sit itaque, ex. gr., punctum D curvae A D C tale, ut intercepta inter curvam, & tangentem N D M sit nihilo aequalis, seu infinitesima ordinis superioris relate ad ordinem aliarum interceptarum in caeteris punctis ejusdem curvae; sumantur duo puncta S, R hinc inde a puncto

cto B in linea abscissarum, & huic puncto infinite proxima; supponamus puncto S competere unicam ordinatam S X, & puncto R unicam ordinatam Z R ambas positivas, aut negativas, tum interceptas X M, Z N inter curvam, & tangentem esse ambas negativas; ut in figura 25., & in hoc casu arcus A D, D C ambo vertunt concavitatem ad diametrum B A, unus ex una parte, alius ex alia ordinatae B D. Ergo in puncto D neque est flexus contrarius, neque regressus; sed tantum ordinata B D erit maxima ex ordinatis istorum arcuum. Si intercepta X M esset negativa, & N Z positiva, ut in figura 26., tunc arcus A D vertit concavitatem, & D C convexitatem ad diametrum A B, unus ex una parte, alius ex alia ordinatae B D. Ergo punctum D erit punctum flexus contrarii. Si in puncto R ordinatae sint imaginariae, sed puncto S competant duae ordinatae S X, S Z ambae positivae, aut negativae, & interceptae X M, Z M sint ambae negativae ut in figura 27., tunc arcus A D,

B C

BC ambo vertunt concavitatem ad diametrum A B, sed ambo ex eadem parte ordinatae B D. Ergo punctum D est punctum regressus primae speciei. Si vero intercepta X M sit negativa, & M Z e contra sit positiva, tunc arcus A D concavitatem arcus D C convexitatem vertit ad diametrum A B ex eadem parte ordinatae B D. Ergo punctum D est punctum regressus alterius speciei. Et sic eadem methodo procedendo in aliis combinationibus, non erit difficile determinare alterationem curvae in puncto D. Atque haec est methodus, qua usus est etiam celeberrimus Pater Vincentius Riccati Societatis Jesu in Dissertatione, quae inscribitur: *Animadversiones in fractionem, cujus numerator & denominator per certam determinationem nihilo aequales fiunt:* quae inserta est Tom. 2. Comm. Academiae Bononiensis. Et haec mihi videntur sufficere pro Elementis Geometriae Infinitesimorum.

APPRO-

APPROBATIO.

JUssu Reverendiss. P. D. Cherubini Branconii Abbatis Generalis Congregationis Caelestinorum diligenter expendimus librum, cui titulus est = Elementa Geometriae infinitesimorum = *a P. D. Hieronymo Saladini ejusdem Congregationis Monacho compositum, & quum in ea Tractatione nihil Religioni & moribus adversum nobis occurrerit; imo vero quum dirigendis, & juvandis studiis sublimioris Matheseos mirifice opportuna visa sit, hinc typis evulgari posse, sententia nostra est.*

D. Fridericus de Judice Abbas S. Eusebii Romae.

D. Appianus Bonafedius Abbas S. Joannis Baptistae Bononiae.

D. CHE-

D. CHERUBINUS BRANCONIUS
Abbas Generalis Congregationis
Caeleſtinorum.

QUum duo Congregationis noſtrae Theologi expenderint opus, cujus titulus eſt = Elementa Geometriae infiniteſimorum = *atque edi poſſe retulerint, facultatem facimus D. Hieronymo Saladini Operis auctori illud typis evulgandi, ſi iis, ad quos ſpectat, ita videbitur.*

Datum ex noſtro Monaſterio S. Jo. Baptiſtae Bononiae die 1. *Maji Anno* 1760.

D. Cherubinus Branconius
Abbas Generalis.

D. Michael Sangiorgius a Secretis.

Vidit

Vidit D. Joannes Maria Vidari Clericus Regularis S. Pauli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiae Poenitentiarius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Domino D. VINCENTIO Cardinali MALVETIO Archiepiscopo Bononiae, & S. R. I. Principe.

Die 5. Julii 1760.

Imprimatur.

F. *P. P. Salvatori Vicarius Generalis Sancti Officii Bononiae.*

ERRATA.			CORRIGE.
Pag.	*lin.*		
62	10	infinitum	finitum
65	7	S R respectu S M	S M respectu S R
68	10	Q N, N R	N R, Q N
	11	Q O, O R	O R, Q O
69	2	Q O, O R	O R, Q O

Propositioni XVII. Lib. Pr. Pag. 34 *lin.* 6 *adde*; modo angulus A C B non sit rectus, neque differat a recto quantitate infinitesima.

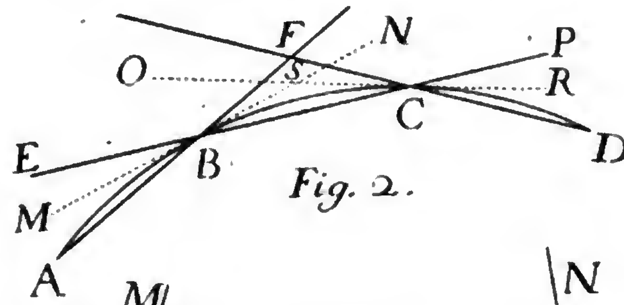


Fig. 2.

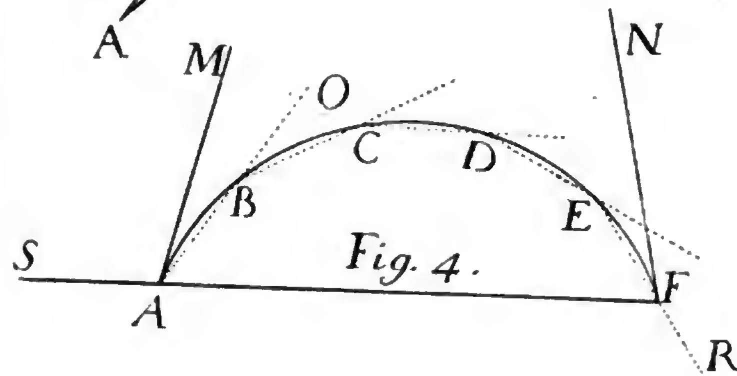
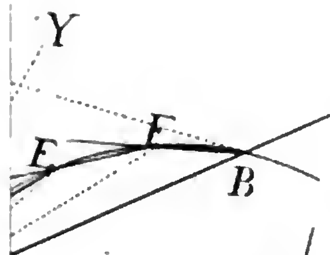


Fig. 4.



g. 5.

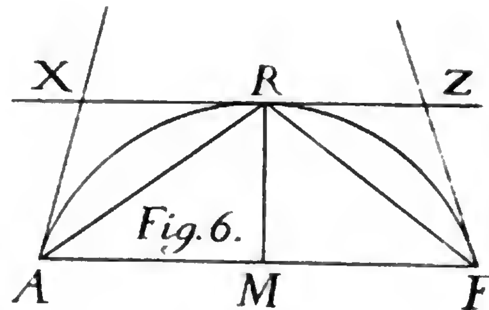


Fig. 6.

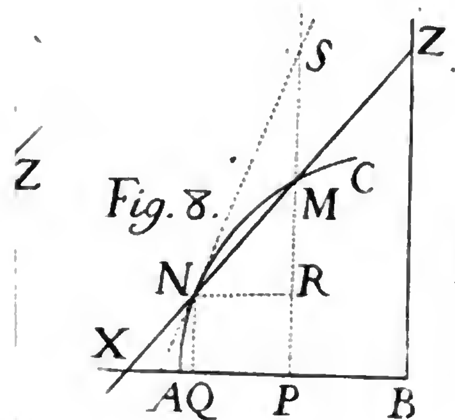


Fig. 8.

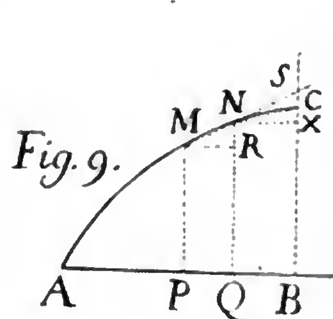


Fig. 9.

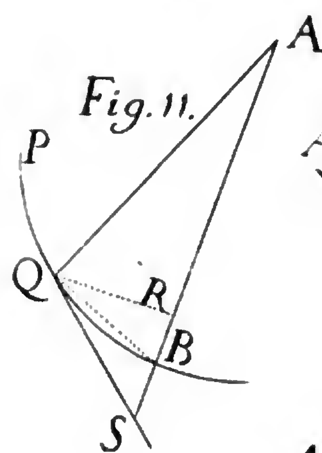


Fig. 11.

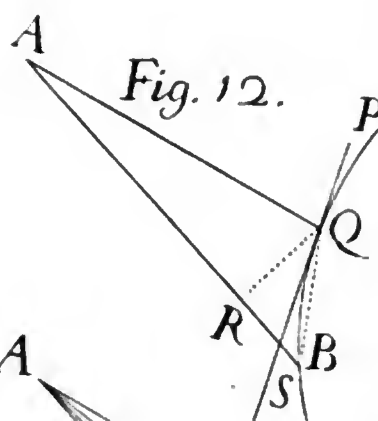


Fig. 12.

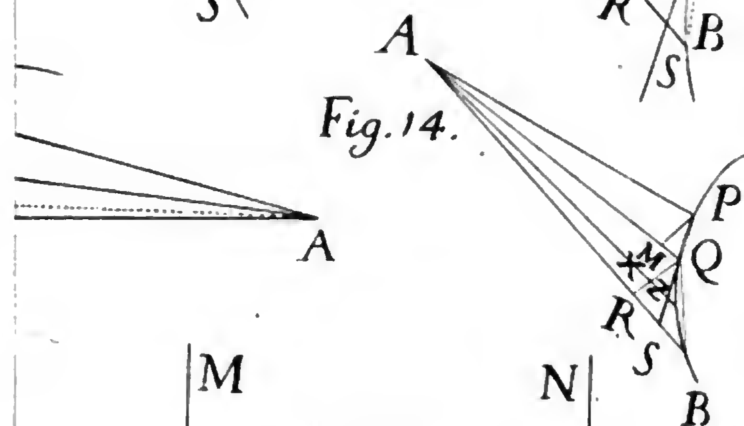


Fig. 14.

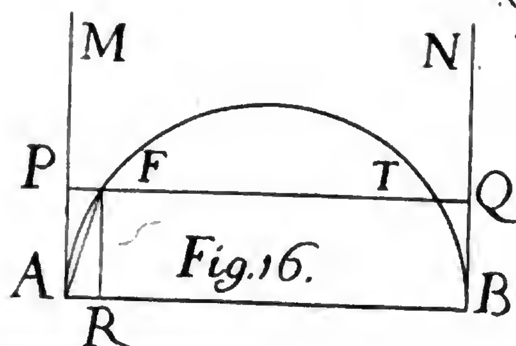
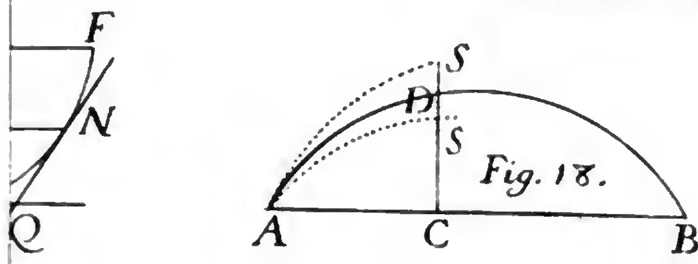
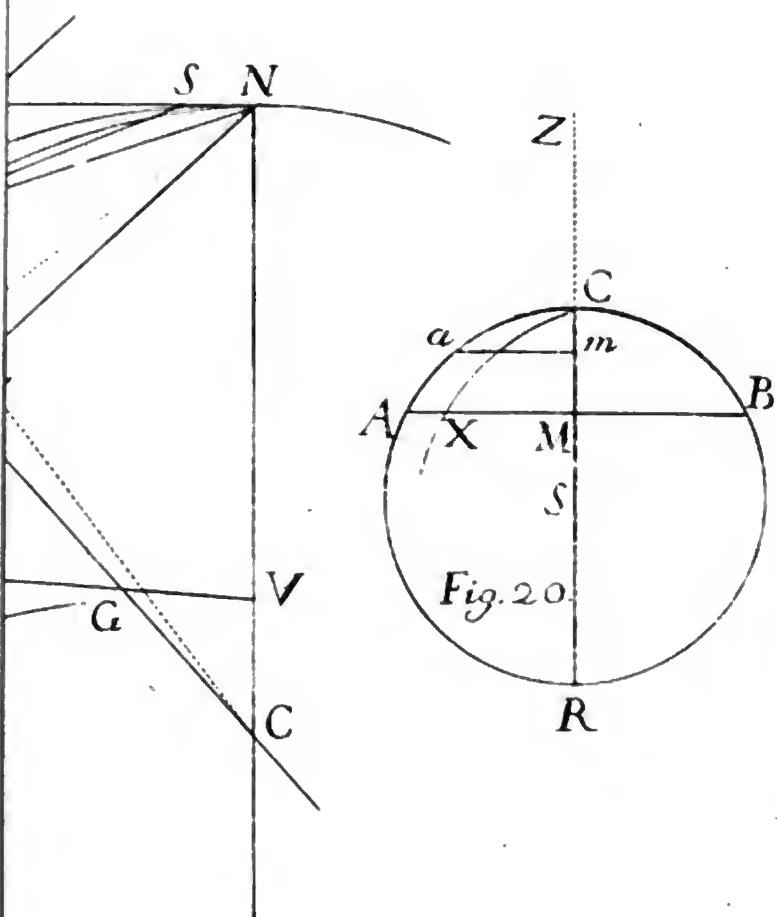


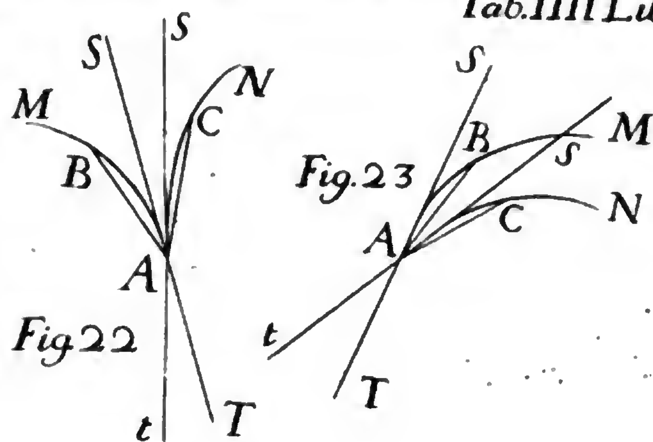
Fig. 16.

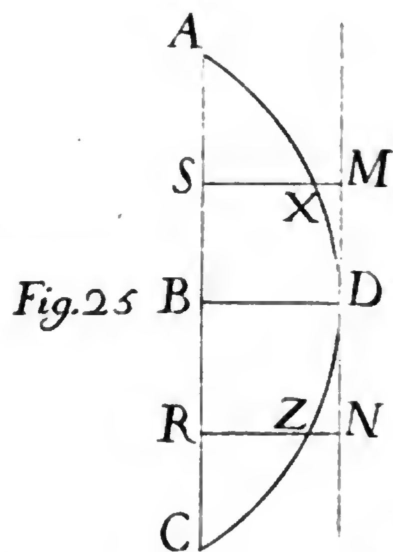
Tab.III.Lib.III.

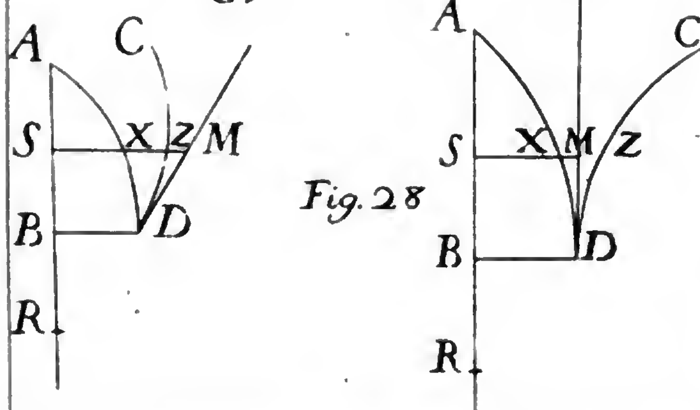




Tab. IIII Lib. III.











185